As grandezas vetoriais

No capítulo I, vimos o porquê da utilização de vetores na caracterização de algumas grandezas físicas, diferenciando as grandezas escalares das vetoriais.

As grandezas escalares são aquelas perfeitamente definidas apenas com um valor numérico acompanhado de uma unidade. Já as vetoriais, para uma caracterização completa, exigem, além da intensidade (valor numérico com uma unidade), uma direção e um sentido do movimento.

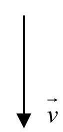
Entretanto, até agora temos dado um tratamento escalar mesmo às grandezas vetoriais. Isso quer dizer que os casos estudados tinham caráter unidimensional e, portanto, operávamos em apenas uma direção pré-definida. Ou seja, se tudo ocorre apenas em uma direção, não precisamos para cada grandeza vetorial, definir sua direção. Além disso, para diferenciar os dois sentidos possíveis, usávamos uma direção com um sentido de orientação. Se o sentido da grandeza seguisse a orientação da reta equivalente à direção em questão, seu valor escalar recebia um sinal positivo. Caso contrário, se o sentido da grandeza fosse contra a orientação da reta-direção, atribuímos o sinal negativo ao valor escalar.

Repare que esse tratamento é idêntico ao dado a uma grandeza escalar. Porém, se usarmos os vetores para a representação das grandezas vetoriais, nosso estudo pode ter mais de uma dimensão, podemos trabalhar no plano (duas dimensões) e até no espaço (três dimensões). Como o vetor já subentende um sentido para a grandeza, é desnecessária a atribuição de um sinal positivo ou negativo à intensidade desse vetor. Para efeitos matemáticos, trataremos a intensidade do vetor como sendo positiva. Podemos chamá-la também de módulo do vetor.

Revistos os conceitos de trigonometria no capítulo II, podemos nos aprofundar nesse assunto.

1. Notação das grandezas vetoriais

Para diferenciar o tratamento vetorial do escalar dado a uma grandeza, toda vez que se representa uma grandeza vetorial, utiliza-se uma seta sobre a notação ou coloca-se a mesma em negrito. Por exemplo, a velocidade escalar pode ser representada simplesmente por v. A velocidade vetorial pode ser representada por $\vec{v}$ ou por **v**. A representação do vetor ficaria da seguinte forma:



Nesse caso, em específico, temos o vetor velocidade com direção vertical e sentido para baixo.

O módulo, ou intensidade, da velocidade vetorial é indicado colocando-se a representação do vetor entre barras verticais. Por exemplo, poderíamos usar $|\vec{v}| = 15$ m/s ou |**v**| = 15 m/s. Às vezes, por vício e acomodação, utiliza-se para o módulo do vetor a mesma representação que para o valor escalar da grandeza, ou seja, simplesmente v = 15 m/s. No entanto, convém lembrar que se trata de conceitos diferentes: o módulo do vetor é utilizado no tratamento vetorial da grandeza e, portanto, não carrega sinal positivo ou negativo. Já o valor escalar, para diferenciar um sentido de outro, deve vir com sinal positivo ou negativo.

2. Forças

Dizer que um corpo A exerce uma força sobre um corpo B significa dizer que ocorre uma interação entre eles, produzindo efeitos sobre o movimento de ambos. Na verdade, as equações horárias do movimento de um corpo, sejam de posição, velocidade ou aceleração, podem ser obtidas diretamente a partir do conhecimento que se tem sobre o sistema de forças existente sobre o corpo e sobre o estado inicial do mesmo. Mais tarde, estudaremos com detalhes a interferência exata do sistema de forças sobre movimento.

Na verdade, quando existe mais de uma força atuando sobre um corpo, ao invés de estudarmos a influência de cada uma delas, estudamos como o conjunto de forças se comporta. Ou seja, pensamos no conjunto de forças como se fosse apenas uma força, que equivale a todas as outras juntas. Essa força imaginária, equivalente ao conjunto todo, é a chamada **força resultante**.

Uma força pode alterar não só as intensidades da posição, velocidade ou aceleração, mas também suas direções ou sentidos. Essas alterações também vão depender da direção e do sentido em que a força é aplicada. Podemos então caracterizar a força como uma grandeza vetorial, isto é, que pode ser representada por vetores.

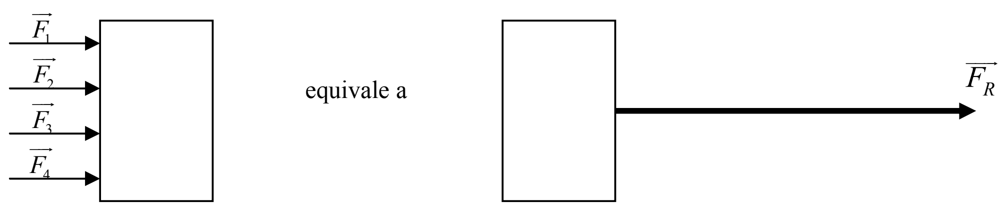
No modelo clássico, o qual estudamos, existe uma infinidade de origens diferentes para as forças. Por exemplo, podemos citar as forças de contato (quando empurramos um corpo com as próprias mãos), as forças elásticas (feitas por uma mola), as forças de atrito, as forças de empuxo, as forças gravitacionais, as forças elétricas, as forças magnéticas e muitas outras. Mas as diferentes origens não importam para a influência da força sobre o movimento. A força caracterizada como um vetor simplesmente é suficiente para a análise.

No Sistema Internacional, utilizamos como unidade para força o **newton** (N). Veremos também qual é a sua relação com as grandezas fundamentais.

3. O cálculo da força resultante

Como dissemos, a força resultante é uma força imaginária, que é capaz de substituir, de forma equivalente, todo o conjunto de forças existente.

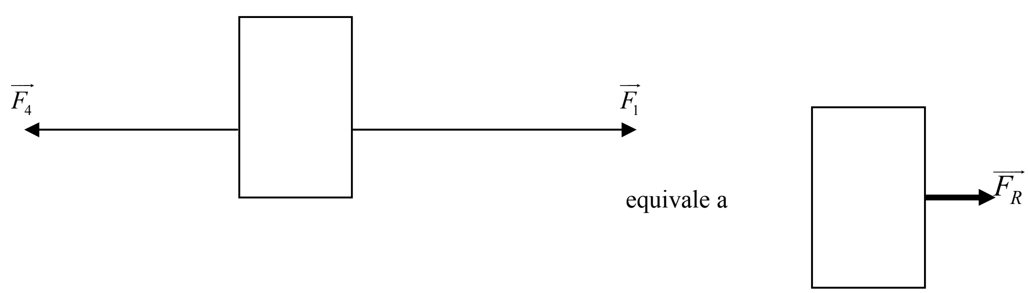
Por exemplo, imagine quatro pessoas empurrando um carro. Se cada uma exerce sobre o mesmo uma força de 100 N, qual é a força resultante? Ou seja, queremos saber, caso fosse apenas uma pessoa empurrando o carro, qual força ela deveria fazer para obter o mesmo efeito que as quatro juntas? A resposta é bastante intuitiva, parece óbvio que ela deve fazer uma força de 400 N.



Expressando esse resultado na linguagem vetorial, podemos dizer que, aplicam-se forças de mesma direção e mesmo sentido sobre um corpo, a intensidade da força resultante é a soma das intensidades de cada força. Além disso, a direção e o sentido da força resultante são os mesmos das forças aplicadas.

Vamos supor agora que sobre um corpo aplicam-se duas forças de mesma direção, mas sentidos contrários. Para a direita, aplica-se uma força $\vec{F_1}$ de intensidade $|\vec{F_1}|$ = 12 N. Para a esquerda, $\vec{F_2}$ de intensidade $|\vec{F_2}|$ = 9,0 N.

Não é difícil supor que essa situação equivale à aplicação de uma única força, horizontal, apontada para a direita, de intensidade igual a 3,0 N.



Isso ocorre porque, dos 12 newtons aplicados para a direita, 9 são anulados pela força para a esquerda, restando 3 newtons como resultante. Generalizando esse resultado, quando aplicam-se forças de mesma direção, porém sentidos contrários, sobre um corpo, a intensidade da força resultante é a diferença entre as intensidades de cada força. Além disso, a direção da força resultante é a mesma das forças, e seu sentido é o mesmo da força de maior intensidade.

É conveniente ressaltar que nós resolvemos os dois casos vistos, em que as forças aplicadas têm a mesma direção, de forma absolutamente intuitiva. E certamente a intuição não deve ser o método final de resolução de um problema. Para solucioná-lo, é claro que a intuição é ponto de partida, para que tenhamos uma noção do caminho pelo qual seguir. Contudo, o próximo passo é elaborar uma teoria que seja coerente com os resultados intuitivos e empíricos, ou seja, comprovados experimentalmente. Além disso, a teoria deve ter o comprometimento com a generalidade, isto é, não pode se restringir aos casos simples, facilmente analisados intuitivamente, como a situação em que as forças aplicadas têm a mesma direção. Devemos desenvolver uma teoria que englobe o maior número possível de casos.

EXTRA

Ao longo do século XVII, a ciência e as artes conviveram simultaneamente com dois paradigmas antagônicos: o cartesianismo e o empirismo.

O primeiro pensamento foi fundado por René Descartes (1596 – 1650), o “pai da filosofia moderna”, como ficou conhecido mais tarde. Sua idéia era tornar matemáticas todas as áreas do conhecimento. Aliás, foi nesse período que a alquimia passou a ser considerada uma ciência, a química.

Nesse ideal, assim como a matemática, tudo o que sabemos deve ser deduzido (intuir ≠ deduzir = provar logicamente). A dedução é um processo em que se combinam um ou mais conhecimentos prévios e, deles, forma-se um novo conhecimento, ou seja, um processo lógico. Por exemplo, imagine duas afirmações:

- Nenhum planeta é quadrado.
- A Terra é um planeta.

A partir desses conhecimentos, deduz-se que a Terra não é quadrada.

Mas para que tudo o que sabemos possa ser deduzido, devemos partir de uma verdade inicial, a partir da qual se desencadeia o processo de deduções. E foi justamente isso que Descartes fez: duvidou de todas as “verdades” existentes até então, e partiu da única certeza que tinha: que era capaz de duvidar. E prosseguiu da seguinte forma: “Se duvido, penso. Penso, logo existo”. “Cogito, ergo sum” significa, em latim, “penso, logo existo”, sua frase célebre.

E assim seguiu em mais seqüências lógicas, chegando até a “provar” a existência de Deus, por mais de uma maneira.

Já o empirismo, opondo-se ao cartesianismo, mas não ao seu racionalismo, teve seu expoente na Inglaterra. Defende que a verdade e a certeza da ciência vêm da experiência (empiria) e da sensação (percepções através dos nossos sentidos).

Francis Bacon (1561 – 1626), precursor imediato da corrente empírica, afirmava que a imparcialidade científica dá-se apenas com a utilização do método indutivo (a experiência seguida da sensação), em oposição ao dedutivo clássico. Criticava os “preconceitos” da ciência, por ele denominados ídolos, que dificultariam a observação científica. Os ídolos são “da tribo” (a projeção da forma humana na interpretação da observação), “da caverna” (a influência dos interesses pessoais na pesquisa), “do foro” (os preconceitos do senso comum) e “do teatro” (distorções da experiência e sua interpretação a fim de adequar a realidade à teoria, e não o contrário, como deveria ocorrer).

David Hume (1711 – 1776), expoente máximo do empirismo, radicaliza as idéias de Bacon, chegando ao ceticismo, negando a possibilidade de conhecimento científico da verdade e, por fim, negando a própria ciência.

A crítica do conhecimento abstrato foi o ponto de partida para sua teoria. Defendia que as idéias não são universais justamente por dependerem das diferentes experiências vividas, ou seja, mais diretamente das sensações, e por isso, as idéias e a ciência são falsas.

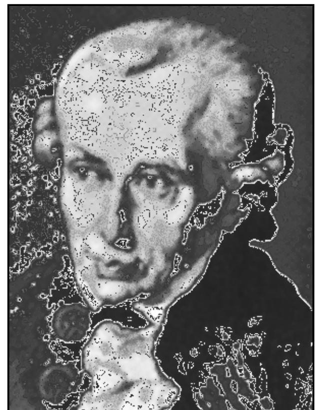
Por exemplo, toda vez que largamos um objeto ele cai. Mas isso não é suficiente para dizer que a próxima vez que o largarmos, ele cairá. Ou seja, criamos a teoria gravitacional, podemos até medir o valor da gravidade, mas como ter certeza de que ela de fato existe e que fará com que, todas as vezes no futuro em que largarmos o objeto, ele caia?

E usa isso para explicar porque alguns experimentos não são bem sucedidos: porque a teoria está errada. Na verdade, não existirá teoria certa. Aliás, Hume chega a criticar a teoria da causalidade, base aristotélica para a ciência ocidental desde a Grécia Antiga, pois ela não é sensível e, por isso, não é real.

A problemática do método científico foi solucionada por Immanuel Kant (1724 – 1804).

Após ler a obra de Hume, em 1770, escreveu uma dissertação sugerindo a diferença entre “a coisa em si” (númeno) e “a coisa para mim” (fenômeno), criticando a “indução pura” de Hume. Isto é, há diferença entre o mundo real, como ele de fato é, e como nós o sentimos e o entendemos. E a análise da experiência é, na verdade, a análise do fenômeno, e não do númeno.

Em 1781, Kant fez a crítica da "razão pura" de Descartes, propondo um novo critério de ciência. Ele classificou o método de Descartes como de juízos analíticos "a priori", isto é, deduções (juízo analítico) que têm por fim antever os resultados de todos os experimentos (a priori). Classificou o método de Hume como de juízos sintéticos "a posteriori", o que quer dizer induções (juízo sintético) com o único objetivo de tratar de experiências passadas (a posteriori), sem o compromisso com previsões de novas experiências.



Immanuel Kant: Nova visão da ciência: juízos sintéticos a priori.

Segundo Kant, o grande problema de ambos os métodos é a estagnação. Como valorizar mais a teoria do que a prática, se esta é a causa de existir do pensamento? Ou seja, as deduções puras não nos trazem nenhuma novidade, são somente remontes do conhecimento já adquirido. E para que serve um juízo a posteriori somente, se o progresso tecnológico depende dos juízos científicos a priori? As experiências são individuais, mas as leis devem ser universais.

Para ele, o critério correto a ser utilizado pela ciência é o juízo sintético a priori, no qual a partir de experiências realizadas e devidamente analisadas, elabora-se uma teoria para explicar aquele comportamento, faz-se uma série de conclusões lógicas, a fim de prever fenômenos semelhantes.

Mesmo assim, faz a ressalva de que a ciência não é estudo do número, impossível de ser alcançado, mas do fenômeno. Isto é, não estudamos as coisas como elas são, e sim como nós as conhecemos.

O fenômeno é, na verdade, o número transformado pelas sensações e pelo intelecto. As sensações correspondem às dimensões físicas, o espaço e o tempo. Kant defende que elas não são propriedades das coisas, isto é, os objetos não têm uma localização no espaço nem no tempo: somos nós quem "inventamos" e atribuímos tais características a eles. A transformação intelectual pode ser resumida na capacidade humana para a causalidade aristotélica. Isto é, voltando ao exemplo anterior, fomos nós que inventamos a gravidade a fim de explicar a queda do objeto. O que seria a gravidade? Ela tem existência? Kant diz que no número, os fatos simplesmente ocorrem, e nós os transformamos em algo lógico, com causa e conseqüência.

Repare que Hume havia negado a causalidade. Kant afirma que ela existe, mas somente como processo mental, colaborador para a transformação do número em fenômeno. E assim ele faz a crítica fundamental à razão clássica, originada no pensamento grego, com a contextualização da teoria da causalidade de Aristóteles, e culmina negando a metafísica (estudo da alma, do mundo como um todo e de Deus) como ciência, pois é um pensamento puramente à moda cartesiana, sem fundamentação prática.

O grande problema da negação da metafísica é a falta de fundamento para a ética. Nesse sentido, Kant faz também, por coerência, a crítica à ética clássica ("se queres ser feliz, faze o bem e evita o mal"). Diz que ela é interesseira (praticá-la para ser feliz), supõe causalidade (sua prática é a causa da felicidade) e supõe também o conhecimento do bem e do mal e, portanto, do número. A nova orientação ética proposta por ele é o imperativo categórico (a regra pela regra, e não pela felicidade), com o seguinte princípio: "age de tal forma que a tua lei possa ser universal". Essa é a chamada "crítica da razão prática". Nela, ao contrário da ciência, que nasce do número, a moral nasce do homem; a felicidade não é interesseira, mas decorrente da prática da ética.

Mais tarde, em meio à corrente alemã do idealismo, Fichte faz uma crítica à obra de Kant, mais especificamente à existência do número. Na verdade, uma dedução lógica:

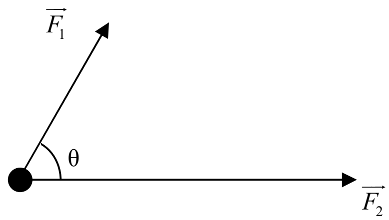
- A teoria da causalidade está restrita à mente, nós "inventamos" as causas das coisas, elas não existem.
- O número é a causa do fenômeno
- Logo, o número não existe.

Essa é a radicalização (lógica) do pensamento científico. Ao deduzir a não existência do número, Fichte defende que nada além de mim existe, tudo é uma criação mental e uma projeção minha, o não-eu, o meu oposto. Nesse sentido, o eu é o criador de tudo. Por exemplo, se eu decido ser um empregado, surge o patrão, o não-eu. Por isso, vou decidir ser patrão, de forma que o não-eu seja o empregado. Eu decido quem sou e, por conseguinte, decido quem é o não-eu. Dizer que o mundo ocorre de forma independente de mim é uma alienação. O eu é o Eu Absoluto. Essa foi a ideologia resgatada futuramente na Alemanha como pressuposto para as políticas de guerra e para a imposição da raça ariana como superior.

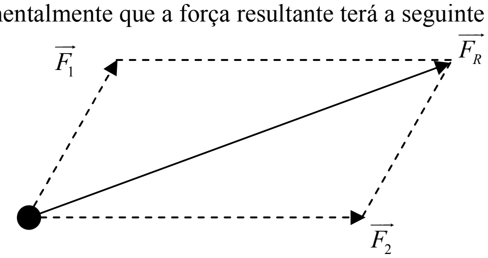
Essa radicalização do racionalismo foi o motivo pelo qual no século XX, surgiram inúmeras correntes filosóficas desprezando a razão e a ciência ocidental (endeusada até então), valorizando a vida e a forma de vivê-la bem consigo mesmo, o individualismo. Nesse aspecto, podemos destacar Friedrich

Nietzsche. Suas obras principais são “O Nascimento da Tragédia”, “Gaia Ciência” e “Assim falava Zaratustra”, cujas leituras são bastante recomendadas.

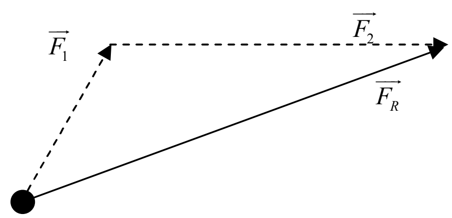
Vamos agora analisar um caso geral, em que são aplicadas duas forças, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, com direções diferentes, fazendo entre si um ângulo θ, sobre um corpo puntiforme (com dimensões desprezíveis).



Pode-se verificar experimentalmente que a força resultante terá a seguinte disposição:

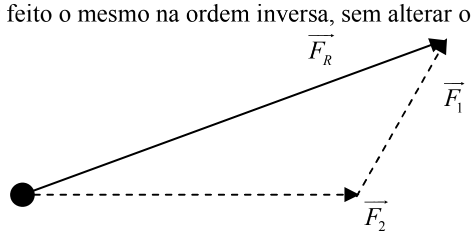


Repare que o vetor força resultante é a diagonal de um paralelogramo formado pelos vetores $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$. Parece razoável redesenhar a disposição dos vetores da seguinte forma:



Essa nova disposição dos vetores pode ser explicada da seguinte forma: a partir da força $\vec{F_1}$, coloca-se, em sua extremidade, a origem do vetor $\vec{F_2}$. O vetor força resultante é o que liga a origem de $\vec{F_1}$ à extremidade de $\vec{F_2}$.

Repare que poderíamos ter feito o mesmo na ordem inversa, sem alterar o resultado:



Seguindo o mesmo raciocínio, se ao invés de duas, tivéssemos três forças sendo aplicadas sobre o corpo, pode-se mostrar que não importa a ordem em que é feita a construção geométrica: teremos sempre o mesmo vetor força resultante.

Além disso, o elemento neutro do cálculo da força resultante é certamente o vetor nulo. Ou seja, adicionar ao sistema uma força nula (vetor de módulo igual a zero) é o mesmo que não fazer nada.

Esse conjunto de propriedades (comutativa, associativa, zero como elemento neutro) sugere que a operação de cálculo da força resultante seja uma soma. Mas não se trata de uma soma de números, mas de vetores. Dizemos então

$$\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

para o sistema em que aplicam-se duas forças sobre o corpo. Em um caso geral, em que se aplicam n forças, temos

$$\boxed{\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n},$$

ou ainda

$$\boxed{\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i},$$

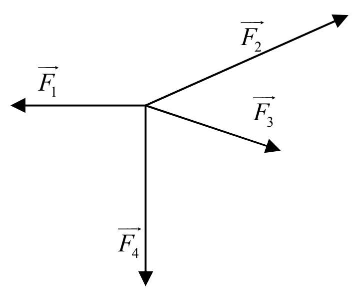
o que quer dizer que **a força resultante que age sobre um corpo é a soma vetorial de todas as forças que lhe são aplicadas**.

Observação importante: Dizer que a força resultante é a soma vetorial de todas as forças NÃO SIGNIFICA DIZER QUE seu módulo é a soma dos módulos de todas as forças. Isso só acontece quando as forças têm a mesma direção e o mesmo sentido, como no exemplo inicial do carro. Já no segundo exemplo, em que as forças têm a mesma direção, porém sentidos contrários, temos uma soma vetorial, e o módulo da força resultante é a subtração dos módulos das forças. Isto é, para o segundo exemplo, $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ e, no entanto, $|\vec{F}_R| = |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2|$. Nós vamos agora analisar o caso geral. Mas lembre-se que o vetor força resultante é sempre a soma vetorial das forças aplicadas, independentemente de sua disposição no espaço.

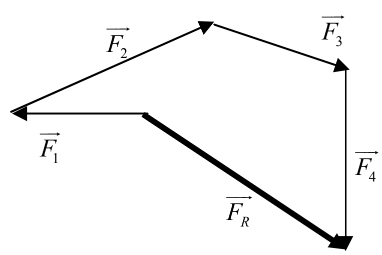
De acordo com o exemplo anterior, podemos sintetizar a idéia de soma vetorial, informalmente, da seguinte forma: dados os vetores $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, a soma $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ é a operação que dispõe os vetores de tal forma que a origem de um coincida com a extremidade do outro e que liga os extremos do "caminho" formado.

Para que fique mais claro, vamos analisar o próximo exercício.

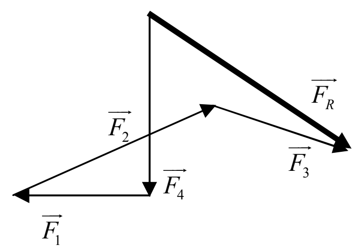
Exercício 4.3.1: São dadas quatro forças aplicadas sobre um corpo, como ilustrado abaixo. Esboce a disposição da força resultante.



Solução: Repare que na disposição dada, todos os vetores estão dispostos com suas origens em um único ponto. Para calcular a soma vetorial, nós vamos realizar a seqüência: "colocar a origem de um vetor na extremidade de outro e fazer a ligação". Mas, como temos quatro forças, faremos um "caminho" só. Veja como fica.



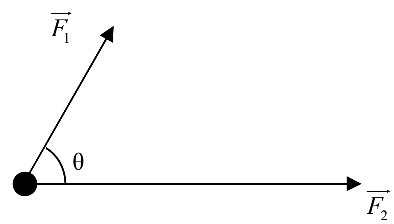
Poderíamos ter realizado a soma vetorial em qualquer ordem, pois ela dispõe das mesmas propriedades que uma soma algébrica, como comutativa e associativa. Veja:



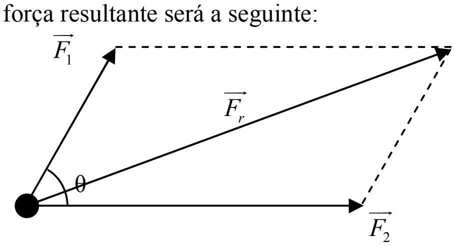
Não importa a ordem em que realizamos a operação, o resultado é sempre o mesmo.

Cálculo do módulo da força resultante

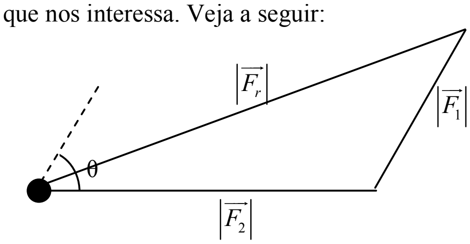
Vamos voltar ao caso em que temos apenas duas forças sendo aplicadas sobre o corpo e elas fazem entre si um ângulo θ.



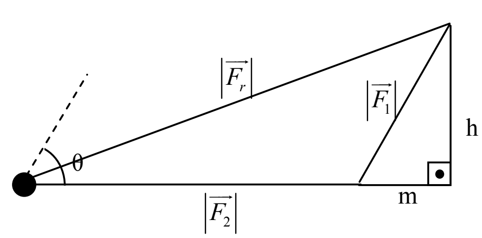
Já vimos que a disposição da força resultante será a seguinte:



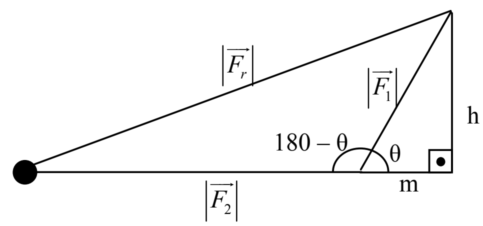
Para que calculemos o módulo da força resultante em função dos módulos das forças aplicadas, vamos transformar a disposição vetorial acima em uma forma geométrica. Isto é, cada vetor será transformado em um segmento de reta, cujo comprimento é igual ao seu módulo. Contudo, consideraremos somente a parte que nos interessa. Veja a seguir:



Agora, vamos prolongar o segmento correspondente ao vetor $\vec{F_2}$, construindo um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é o segmento correspondente a $\vec{F_1}$. Vamos também denominar os novos segmentos como *m* e *h*.



O ângulo θ é a abertura entre os vetores $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$. Por isso, pode ser transferido para o triângulo retângulo. Podemos também completar o ângulo de 180º à esquerda com 180º – θ. Veja:



Repare que temos na figura dois triângulos retângulos. O menor, com os lados $|\vec{F_1}|$, h e m. O maior, com $|\vec{F_r}|$, h e $|\vec{F_2}|+m$.

Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo menor, temos:

$$|\vec{F_1}|^2 = m^2 + h^2 \text{ (I)}$$

Além disso, temos nesse triângulo:

$$\cos\theta = \frac{m}{|\vec{F_1}|} \Rightarrow m = |\vec{F_1}|\cos\theta \text{ (II)}$$

O mesmo para o triângulo retângulo maior:

$$|\vec{F_r}|^2 = h^2 + \left(|\vec{F_2}| + m\right)^2$$

$$|\vec{F_r}|^2 = h^2 + |\vec{F_2}|^2 + 2.|\vec{F_2}|.m + m^2$$

$$|\vec{F_r}|^2 = |\vec{F_2}|^2 + 2.|\vec{F_2}|.m + \left(h^2 + m^2\right)$$

Substituindo $\left(h^2 + m^2\right)$ por I e m por II, a equação acima fica:

$$\boxed{|\vec{F_r}|^2 = |\vec{F_1}|^2 + |\vec{F_2}|^2 + 2.|\vec{F_1}|.|\vec{F_2}|.\cos\theta},$$

que é a **Lei do Paralelogramo**. Em outras palavras, a diagonal do paralelogramo, que equivale ao módulo do vetor força resultante, é expressa conforme a relação acima, em função unicamente dos lados do paralelogramo, que equivalem aos módulos das forças aplicadas sobre o corpo, e do ângulo de abertura entre eles.

Agora, vamos chamar de α o ângulo 180º – θ. Pelo círculo trigonométrico, podemos dizer que

$$\cos(180 - \theta) = -\cos\alpha$$

Substituindo na equação acima, teremos:

$$|\vec{F_r}|^2 = |\vec{F_1}|^2 + |\vec{F_2}|^2 + 2.|\vec{F_1}|.|\vec{F_2}|.(-\cos\alpha)$$

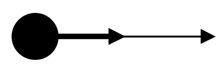
$$\boxed{|\vec{F_r}|^2 = |\vec{F_1}|^2 + |\vec{F_2}|^2 - 2.|\vec{F_1}|.|\vec{F_2}|.\cos\alpha},$$

que é a **Lei dos Co-senos**. Faz-se essa diferenciação porque no primeiro caso, calculamos a diagonal de um paralelogramo dados os seus lados e o ângulo de abertura entre eles. No segundo caso, focamos o triângulo de lados $|\vec{F_1}|$, $|\vec{F_2}|$ e $|\vec{F_r}|$. Estamos calculando um dos lados do triângulo, dados os outros dois lados e o ângulo entre eles.

Aplicação das conclusões obtidas nos exemplos iniciais

Todo o processo dedutivo partiu dos exemplos mais simples, em que as forças tinham a mesma direção, os quais nós analisamos intuitivamente. Vamos agora verificar se as conclusões que nós obtivemos estão de acordo com os resultados iniciais.

Havíamos concluído, inicialmente, que quando duas forças de mesma direção e sentido eram aplicadas sobre um corpo, o módulo da força resultante seria a soma dos módulos das forças. Vamos verificar isso.



Conforme estabelecemos, a força resultante é dada pela soma vetorial das forças aplicadas (e isso vale para qualquer caso!): $\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. Resta saber se poderemos também escrever, para esse caso, que $\left|\overrightarrow{F_R}\right| = \left|\overrightarrow{F_1}\right| + \left|\overrightarrow{F_2}\right|$.

Como não há abertura entre as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$, o ângulo θ é igual a 0º. Vamos aplicar a lei do paralelogramo para calcular a força resultante:

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2 + 2.\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\cos 0^\circ$$

Como $\cos 0^\circ = 1$, a equação acima é reescrita da seguinte maneira:

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2 + 2.\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|$$

O segundo membro da equação agora é uma expressão passível de ser fatorada. Sabemos que

$$\left(a+b\right)^2 = a^2 + b^2 + 2ab\ ,$$

o que tem exatamente o mesmo formato que o segundo membro da equação. Vamos então fatorá-lo:

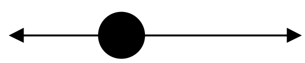
$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = \left(\left|\overrightarrow{F_1}\right| + \left|\overrightarrow{F_2}\right|\right)^2$$

Extraindo a raiz de ambos os termos, teremos:

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right| = \left|\overrightarrow{F_1}\right| + \left|\overrightarrow{F_2}\right|,$$

conforme já havíamos concluído.

No segundo exemplo que vimos, as duas forças aplicadas sobre o corpo tinham a mesma direção, mas sentidos contrários.



Pela convenção, independentemente da disposição gráfica das forças, dizemos que $\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. Se a intuição estiver certa, podemos afirmar, para esse caso, que $\left|\overrightarrow{F_R}\right| = \left|\overrightarrow{F_1}\right| - \left|\overrightarrow{F_2}\right|$. Para verificar isso, vamos usar a Lei do Paralelogramo. Como as forças estão na mesma direção e em sentidos opostos, o ângulo de abertura entre elas é de 180º. Podemos então escrever:

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2 + 2.\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\cos 180^\circ$$

Como $\cos 180^\circ = -1$, temos

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2 + 2.\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\left(-1\right)$$

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2 - 2.\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|$$

Novamente, podemos fatorar o segundo termo da equação. Lembrando que

$$\begin{aligned}\left(a-b\right)^2 &= a^2 + \left(-b\right)^2 + 2a\left(-b\right) \\ \left(a-b\right)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\end{aligned}\ ,$$

Podemos reescrever a Lei do Paralelogramo para esse caso da seguinte forma:

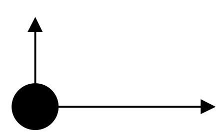
$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = \left(\left|\overrightarrow{F_1}\right| - \left|\overrightarrow{F_2}\right|\right)^2$$

Extraindo a raiz de ambos os termos, teremos:

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right| = \left|\overrightarrow{F_1}\right| - \left|\overrightarrow{F_2}\right|$$

Caso das forças perpendiculares

Vamos agora analisar o caso em que as duas forças que são aplicadas sobre o corpo fazem entre si um ângulo de 90º.



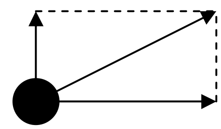
Estabelecemos que $\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. Portanto, Pela Lei do Paralelogramo,

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2 + 2.\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\cos 90^o$$

Como $\cos 90^o = 0$,

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2,$$

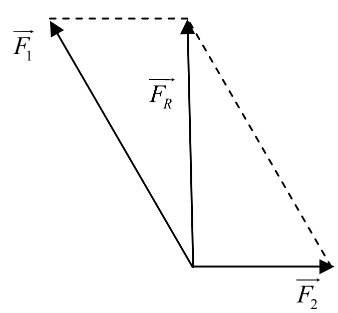
que é justamente a relação de Pitágoras. Isso é mais facilmente entendido se percebermos que ao invés de um paralelogramo, teremos um retângulo no cálculo da força resultante. E esta será a sua diagonal.



Resumindo: Vale a pena insistir que em todos os casos, sempre teremos $\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, isto é, a força resultante é a soma vetorial das forças aplicadas sobre o corpo. A soma vetorial é uma operação que consiste em arrumar os vetores de tal forma que a origem de um coincida com a extremidade do outro, e o vetor resultante é aquele que une os extremos do "caminho" formado por eles. Isso não significa definitivamente que $\left|\overrightarrow{F_R}\right| = \left|\overrightarrow{F_1}\right| + \left|\overrightarrow{F_2}\right|$. Como vimos, isso só irá ocorrer nos casos em que as forças têm a mesma direção e o mesmo sentido. No caso mais geral, o módulo da força resultante é dado pela Lei do Paralelogramo: $\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2 + 2.\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\cos\theta$.

Exercício 4.3.2: Aplicam-se duas forças sobre um mesmo corpo, de módulos 10 e 20 newtons. O ângulo entre as forças é de 120º. Calcule o módulo da força resultante.

Solução: Vamos esboçar a disposição das forças aplicadas e da força resultante.



O módulo da força resultante é dado simplesmente pela aplicação da Lei do Paralelogramo, já que, geometricamente, o que queremos saber é o valo da diagonal de um paralelogramo, dados os seus lados e o ângulo entre eles que é cortado pela diagonal. Pelo círculo trigonométrico, podemos visualizar que $\cos 120^o = -\cos 60^o = -1/2$. Portanto,

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2 + 2.\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\cos 120^o$$

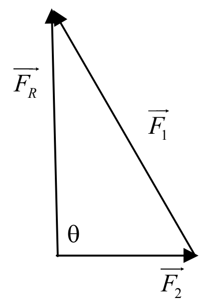
$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = 10^2 + 20^2 + 2.10.20.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right|^2 = 100 + 400 - 400.\frac{1}{2} = 300$$

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right| = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

Exercício 4.3.3: Para o exercício anterior, calcule o ângulo entre a força resultante e $\overrightarrow{F_2}$.

Solução: Vamos considerar o triângulo formado por esse ângulo, à direita:



Aplicando a Lei dos Co-senos para esse triângulo, teremos:

$$\left|\vec{F_1}\right|^2 = \left|\vec{F_R}\right|^2 + \left|\vec{F_2}\right|^2 - 2.\left|\vec{F_R}\right|.\left|\vec{F_2}\right|.\cos\theta$$

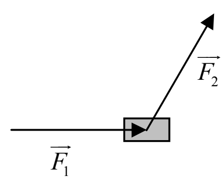
$$400 = 300 + 100 - 2.10\sqrt{3}.10.\cos\theta$$

$$2.10\sqrt{3}.10.\cos\theta = 0$$

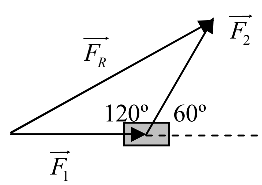
$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = 90^{\circ}$$

Exercício 4.3.4: Uma pessoa empurra um bloco com uma força de 100 N, enquanto outra o puxa, também com uma força de 100 N, através de um fio que faz um ângulo de 60º com a horizontal, conforme a figura a seguir. Determine o módulo da força resultante, e sua inclinação em relação à direção horizontal.



Solução: Existem duas formas equivalentes de "enxergar" a força resultante nesse caso. A primeira, deixando os vetores na mesma posição em que estão, é ligar os extremos do "caminho" formado por eles. Veja:



Nesse caso, a força resultante é um dos lados de um triângulo, oposta ao ângulo de 120º, e os outros dois lados são conhecidos. Aplicamos então a Lei dos Co-senos:

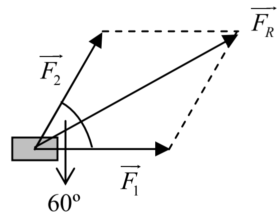
$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + \left|\vec{F_2}\right|^2 - 2.\left|\vec{F_1}\right|.\left|\vec{F_2}\right|.\cos 120^{\circ}$$

Pelo círculo trigonométrico, podemos concluir que $\cos 120^{\circ} = -\cos 60^{\circ}$. Substituindo essa informação na equação acima, temos:

$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + \left|\vec{F_2}\right|^2 - 2.\left|\vec{F_1}\right|.\left|\vec{F_2}\right|.\left(-\cos 60^{\circ}\right)$$

$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + \left|\vec{F_2}\right|^2 + 2.\left|\vec{F_1}\right|.\left|\vec{F_2}\right|.\cos 60^{\circ}$$

A segunda solução nos levará à mesma equação para o cálculo da força resultante. Ela consiste em posicionar os vetores de forma que suas origens sejam coincidentes. Isso baseia-se no princípio de que empurrar um corpo com uma força de 100 N tem o mesmo efeito que puxá-lo, mantendo-se a direção, o sentido e o módulo. Isto é, não importa a forma com que a força é aplicada sobre o corpo, só nos interessam as suas três características básicas como um vetor: módulo, direção e sentido. Então veja:



Agora, com as duas forças tendo suas origens coincidentes, a força resultante passa a ser a diagonal do paralelogramo, calculada com a Lei do Paralelogramo.

$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + \left|\vec{F_2}\right|^2 + 2.\left|\vec{F_1}\right|.\left|\vec{F_2}\right|.\cos 60^\circ$$

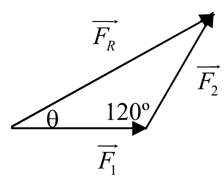
Essa expressão é idêntica à que chegamos pela primeira solução.

$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = 100^2 + 100^2 + 2.100.100.\frac{1}{2}$$

$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = 10000 + 10000 + 10000 = 30000$$

$$\left|\vec{F_r}\right| = \sqrt{30000} = 100\sqrt{3}$$

Para calcularmos o ângulo que a força resultante faz com a horizontal, vamos considerar o triângulo que contem o ângulo procurado, a força resultante e algum segmento conhecido na horizontal. Isto é, teremos o seguinte triângulo:



Vamos aplicar a Lei dos Co-senos de forma que encontremos o ângulo θ.

$$\left|\vec{F_2}\right|^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + \left|\vec{F_R}\right|^2 - 2.\left|\vec{F_1}\right|.\left|\vec{F_R}\right|.\cos\theta$$

$$100^2 = 100^2 + \left(100\sqrt{3}\right)^2 - 2.100.100\sqrt{3}.\cos\theta$$

$$10000 = 10000 + 10000.3 - 20000\sqrt{3}.\cos\theta$$

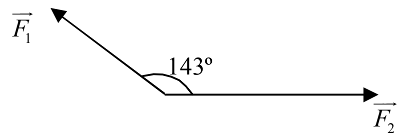
$$0 = 10000.3 - 20000\sqrt{3}.\cos\theta$$

$$2\sqrt{3}.\cos\theta = 3$$

$$\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2.3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

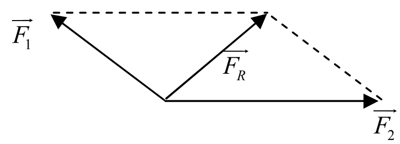
Isto é, θ é o arco (ângulo) cujo co-seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Podemos escrever isso em linguagem matemática da seguinte forma: $\theta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ou seja, pela tabela que construímos no início do capítulo, $\theta = 30^\circ$.

Exercício 4.3.5: Duas forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ são aplicadas sobre um corpo puntiforme, fazendo entre si um ângulo de 143º. Sabe-se que seus módulos são respectivamente iguais a 4,0 e 6,0 newtons e que $\cos 53^\circ = 0,6$. Veja a figura abaixo:



a) Esboce a construção da força resultante;
b) Calcule seu módulo.
c) Determine o ângulo que a força resultante faz com $\vec{F_2}$.

Solução: Para o esboço da disposição da força resultante no sistema dado, fazemos o paralelogramo cujos lados são as próprias forças aplicadas:



O módulo da força resultante pode ser calculado pela Lei do Paralelogramo.

$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + \left|\vec{F_2}\right|^2 + 2.\left|\vec{F_1}\right|.\left|\vec{F_2}\right|.\cos\theta$$

$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = 4^2 + 6^2 + 2.4.6.\cos 143º$$

$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = 52 + 48.\cos 143º$$

A dificuldade agora está em determinar o co-seno de 143º. Sabemos apenas que $\cos 53º = 0,6$. Mas, como $143º = 180º - 37º$, pelo círculo trigonométrico, podemos dizer que $\cos 143º = -\cos 37º$. Por outro lado, 37º é o ângulo complementar de 53º, isto é, $37º + 53º = 90º$. Isso, pelas relações que já estudamos, leva à equação $\cos 37º = \operatorname{sen} 53º$. Em suma, o que temos até agora é:

$$\cos 143º = -\cos 37º = -\operatorname{sen} 53º$$

Tendo o co-seno de 53º, é fácil calcular o seu seno, pois $\operatorname{sen}^2 53º + \cos^2 53º = 1$. Dessa forma,

$$\operatorname{sen}^2 53º + 0,6^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 53º + 0,36 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 53º = 0,64$$

$$\operatorname{sen} 53º = \pm 0,8$$

Temos duas possibilidades para o seno de 53º. Como este ângulo é do 1º quadrante, $\operatorname{sen} 53º = +0,8$. Voltando à conta anterior,

$$\cos 143º = -\cos 37º = -\operatorname{sen} 53º = -0,8$$

Agora vamos utilizar esse resultado na Lei do Paralelogramo, a qual não tínhamos conseguido continuar.

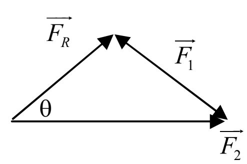
$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = 52 + 48.(-0,8)$$

$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = 52 - 48.0,8$$

$$\left|\vec{F_r}\right|^2 = 13,6$$

$$\left|\vec{F_r}\right| = 3,69\ N$$

E, por fim, se queremos calcular o ângulo de abertura entre a força resultante e a direção horizontal, devemos utilizar o triângulo que contem esse ângulo e lados conhecidos. Portanto, vamos aplicar a Lei dos Co-senos sobre o triângulo a seguir:



$$\left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_R}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2 - 2.\left|\overrightarrow{F_R}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\cos\theta$$
$$4^2 = 3,69^2 + 6^2 - 2\times 3,69\times 6.\cos\theta$$
$$16 = 13,6 + 36 - 44,3.\cos\theta$$
$$\cos\theta = 0,76$$

Não sabemos, a princípio, qual ângulo tem como co-seno 0,76. Nesse caso, há três saídas. A primeira é deixar como resposta θ na forma de arccos. Veja como:

$$\theta = \arccos 0,76$$

Isso, assim como no exercício anterior, quer dizer que θ é o arco (ângulo) cujo co-seno vale 0,76. Não há problema nessa forma de resposta, desde que θ realmente não esteja na tabela que construímos no início do capítulo. Poderíamos também consultar uma tabela trigonométrica, como a mostrada abaixo. Há ainda a possibilidade do uso de uma calculadora. Algumas possuem as funções arcsen, arccos e arctg. Mas eles são apresentados de uma forma diferente: $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$, respectivamente.

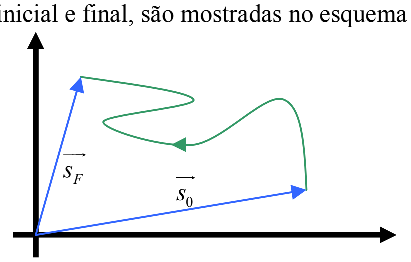
Ângulo	sen	cos	tg	Ângulo	sen	cos	tg
1	0,017452	0,999848	0,017455	46	0,71934	0,694658	1,03553
2	0,034899	0,999391	0,034921	47	0,731354	0,681998	1,072369
3	0,052336	0,99863	0,052408	48	0,743145	0,669131	1,110613
4	0,069756	0,997564	0,069927	49	0,75471	0,656059	1,150368
5	0,087156	0,996195	0,087489	50	0,766044	0,642788	1,191754
6	0,104528	0,994522	0,105104	51	0,777146	0,62932	1,234897
7	0,121869	0,992546	0,122785	52	0,788011	0,615661	1,279942
8	0,139173	0,990268	0,140541	53	0,798636	0,601815	1,327045
9	0,156434	0,987688	0,158384	54	0,809017	0,587785	1,376382
10	0,173648	0,984808	0,176327	55	0,819152	0,573576	1,428148
11	0,190809	0,981627	0,19438	56	0,829038	0,559193	1,482561
12	0,207912	0,978148	0,212557	57	0,838671	0,544639	1,539865
13	0,224951	0,97437	0,230868	58	0,848048	0,529919	1,600335
14	0,241922	0,970296	0,249328	59	0,857167	0,515038	1,664279
15	0,258819	0,965926	0,267949	60	0,866025	0,5	1,732051
16	0,275637	0,961262	0,286745	61	0,87462	0,48481	1,804048
17	0,292372	0,956305	0,305731	62	0,882948	0,469472	1,880726
18	0,309017	0,951057	0,32492	63	0,891007	0,45399	1,962611
19	0,325568	0,945519	0,344328	64	0,898794	0,438371	2,050304
20	0,34202	0,939693	0,36397	65	0,906308	0,422618	2,144507
21	0,358368	0,93358	0,383864	66	0,913545	0,406737	2,246037
22	0,374607	0,927184	0,404026	67	0,920505	0,390731	2,355852
23	0,390731	0,920505	0,424475	68	0,927184	0,374607	2,475087
24	0,406737	0,913545	0,445229	69	0,93358	0,358368	2,605089
25	0,422618	0,906308	0,466308	70	0,939693	0,34202	2,747477
26	0,438371	0,898794	0,487733	71	0,945519	0,325568	2,904211
27	0,45399	0,891007	0,509525	72	0,951057	0,309017	3,077684
28	0,469472	0,882948	0,531709	73	0,956305	0,292372	3,270853
29	0,48481	0,87462	0,554309	74	0,961262	0,275637	3,487414

30	0,5	0,866025	0,57735	75	0,965926	0,258819	3,732051
31	0,515038	0,857167	0,600861	76	0,970296	0,241922	4,010781
32	0,529919	0,848048	0,624869	77	0,97437	0,224951	4,331476
33	0,544639	0,838671	0,649408	78	0,978148	0,207912	4,70463
34	0,559193	0,829038	0,674509	79	0,981627	0,190809	5,144554
35	0,573576	0,819152	0,700208	80	0,984808	0,173648	5,671282
36	0,587785	0,809017	0,726543	81	0,987688	0,156434	6,313752
37	0,601815	0,798636	0,753554	82	0,990268	0,139173	7,11537
38	0,615661	0,788011	0,781286	83	0,992546	0,121869	8,144346
39	0,62932	0,777146	0,809784	84	0,994522	0,104528	9,514364
40	0,642788	0,766044	0,8391	85	0,996195	0,087156	11,43005
41	0,656059	0,75471	0,869287	86	0,997564	0,069756	14,30067
42	0,669131	0,743145	0,900404	87	0,99863	0,052336	19,08114
43	0,681998	0,731354	0,932515	88	0,999391	0,034899	28,63625
44	0,694658	0,71934	0,965689	89	0,999848	0,017452	57,28996
45	0,707107	0,707107	1	90	1	0	-

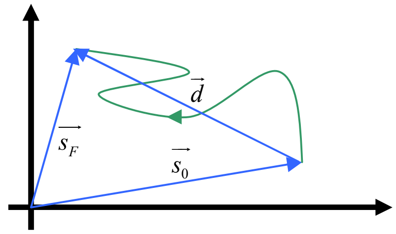
4. Os vetores posição e deslocamento

Desta seção em diante, vamos reapresentar as grandezas cinemáticas do capítulo anterior, expandindo seus conceitos através da notação vetorial. Pode parecer que a apresentação de todo o conteúdo anterior a respeito de forças foi sem objetivo, já que vamos simplesmente voltar aos assuntos anteriormente abordados. Existem duas observações a serem feitas sobre isso. A primeira é que nas próximas seções, precisaremos de conceitos de subtração de vetores e, por isso, fez-se necessária a introdução imediata da soma vetorial, justificada fisicamente pelo cálculo da força resultante. A segunda refere-se ao fato de que não faz sentido para a física, como uma ciência, simplesmente estudar as diferentes componentes descritivas de um movimento: posição, velocidade e aceleração, sem que possamos interferir diretamente sobre um sistema. A forma de interferência sobre um sistema ocorre com as forças, e os efeitos produzidos por essa interação são descritos pelas Leis de Newton.

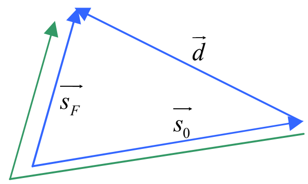
Dado um sistema de referência, isto é, um sistema de eixos ordenados com uma origem, o **vetor posição** (ou **posição vetorial**) de um corpo é aquele que liga a origem do sistema à posição ocupada pelo corpo. Vamos supor que um corpo se desloca por uma trajetória qualquer ao longo de um período de tempo $\Delta t = t_F - t_0$. Suas posições, inicial e final, são mostradas no esquema a seguir:



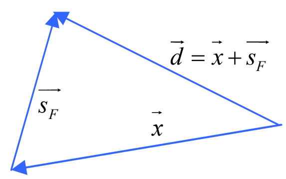
Ignorando a trajetória, e considerando apenas as posições inicial e final ocupadas pelo corpo, definimos o **vetor deslocamento** em um intervalo Δt como aquele que liga as posições inicial e final ocupadas pelo corpo no intervalo Δt.



Vamos destacar o trio de vetores analisados neste exemplo. Lembre-se que em uma soma vetorial, dispõem-se os vetores de forma que a extremidade do primeiro coincida com a origem do outro, e o resultado é o vetor que liga os extremos do "caminho" formado. Repare o "caminho" seguido pelo vetor deslocamento (mostrado externamente aos vetores posição):



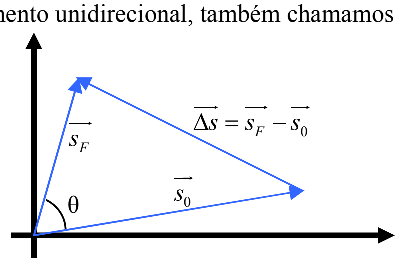
Poderíamos dizer, portanto, que o vetor deslocamento é a soma de dois vetores: o primeiro, com o mesmo módulo e a mesma direção que $\vec{s_0}$, mas de sentido contrário a ele (vamos chamá-lo de $\vec{x}$); e o outro é $\vec{s_F}$. Isto é,



Quando estudamos a cinemática escalar, utilizamos como padrão que, dada uma direção, o sinal negativo em uma grandeza invertia o seu sentido. Assim sendo, é razoável dizer que $\vec{x} = -\vec{s_0}$. Sendo assim, podemos dizer que o vetor deslocamento pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{s_F}$$
$$\vec{d} = -\vec{s_0} + \vec{s_F}$$
$$\vec{d} = \vec{s_F} - \vec{s_0}$$

Portanto, por analogia ao movimento unidirecional, também chamamos o vetor deslocamento de $\overrightarrow{\Delta s}$.



Observação importante: De forma a generalizar o resultado anterior, podemos dizer que a disposição dos vetores acima sempre é válida para uma subtração vetorial. Se dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ estão dispostos de forma que suas origens estão posicionadas no mesmo ponto, como os vetores $\vec{s_0}$ e $\vec{s_F}$ no exemplo acima, o vetor $\vec{a} - \vec{b}$ é aquele que liga a extremidade de $\vec{b}$ à extremidade de $\vec{a}$.

Seja θ o ângulo entre os vetores posição do móvel, conforme mostra a figura acima. Pela Lei dos Co-senos, obtida a partir da Lei do Paralelogramo, podemos escrever:

$$\left|\overrightarrow{\Delta s}\right|^2 = \left|\vec{s_F}\right|^2 + \left|\vec{s_0}\right|^2 - 2.\left|\vec{s_F}\right|.\left|\vec{s_0}\right|.\cos\theta$$

Repare no sinal de "menos" no segundo termo da equação, que a diferencia da Lei do Paralelogramo, já que estamos estudando um triângulo.

5. Os vetores velocidade média e velocidade instantânea

Vamos considerar, em princípio, o mesmo movimento do exemplo anterior, ocorrido no intervalo de tempo Δt. Prosseguindo na analogia com a cinemática escalar, vamos definir o **vetor velocidade média** (ou **velocidade vetorial média**) como:

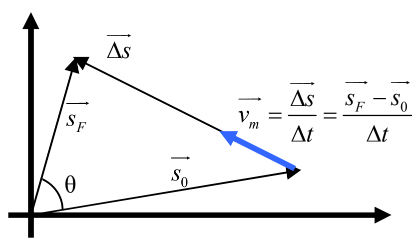
$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t}$$

Isto é, o vetor velocidade média é a razão entre o vetor deslocamento e o intervalo de tempo, uma divisão de um vetor por um valor escalar.

Faz sentido que o vetor velocidade média tenha a mesma direção e sentido que o vetor deslocamento e, além disso, sua intensidade corresponda de fato à rapidez do movimento. Vamos então, generalizando, considerar para essa operação uma determinada regra. Sempre que dividirmos um vetor $\vec{v}$ por um escalar *c*, o resultado será um vetor:

- Cuja direção é a mesma de $\vec{v}$;
- Cujo sentido é o mesmo de $\vec{v}$, se *c* for positivo; ou é o contrário do de $\vec{v}$, se *c* for negativo;
- Cujo módulo é a razão entre o módulo de $\vec{v}$ e o escalar *c*: $|\vec{v}|/c$.

Dessa forma, para o exemplo anterior teremos o vetor velocidade média disposto da seguinte maneira:



Pelo padrão que definimos, o vetor velocidade média deve ter sempre a mesma direção que o vetor deslocamento. Além disso, como Δt é sempre um valor escalar positivo, eles também terão sempre o mesmo sentido. E seu módulo é dado por

$$\left|\overrightarrow{v_m}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{\Delta s}\right|}{\Delta t} ,$$

onde $\left|\overrightarrow{\Delta s}\right|$ é calculado pela Lei dos Co-senos, conforme a seção anterior.

A partir de agora, iremos continuar mantendo a analogia com a cinemática escalar sem a preocupação de tecer esse comentário para cada nova definição.

Vamos então definir o **vetor velocidade instantânea** (ou **velocidade vetorial instantânea**) como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v_m} ,$$

ou seja, a velocidade vetorial instantânea é a velocidade vetorial média para um período de tempo Δt muitíssimo pequeno, para um instante. Dessa forma, escrevemos também:

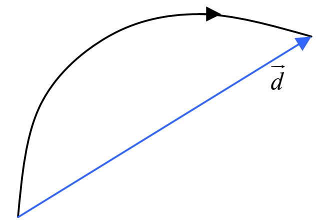
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t} ,$$

que, pela definição de derivada, equivale a escrever

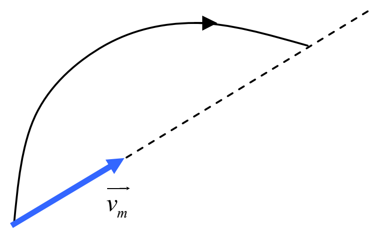
$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} .$$

Isso significa que a velocidade vetorial é a taxa de variação da posição vetorial. Parece razoável supor que o módulo da velocidade vetorial instantânea é justamente o módulo do valor da velocidade escalar, isto é, o módulo da velocidade vetorial instantânea representa exatamente a rapidez do móvel naquele instante. Mas qual é a sua direção e o seu sentido? A resposta não é exatamente óbvia porque em um intervalo Δt muito pequeno, não fica claro qual é a direção do vetor deslocamento.

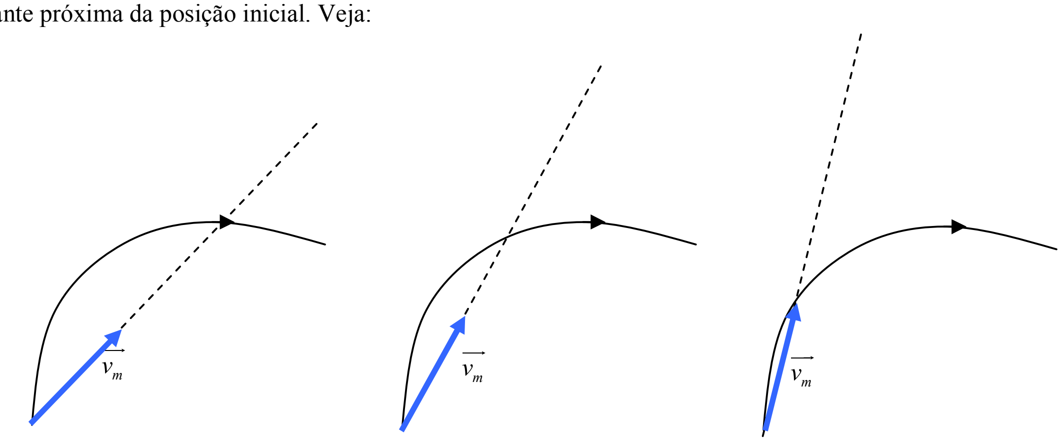
Vamos considerar a trajetória de uma partícula no intervalo $\Delta t = t - t_0$ significativo, e o respectivo vetor deslocamento:



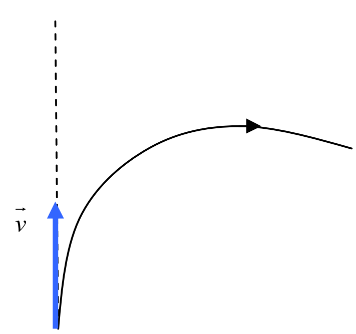
Nesse caso, a velocidade vetorial instantânea terá uma disposição como a seguir:



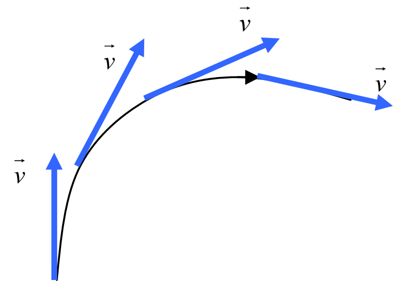
Se a velocidade vetorial instantânea equivale à velocidade vetorial média para um intervalo Δt muitíssimo pequeno, vamos fazer isso de forma a aproximar t de t_0. Ou seja, vamos considerar deslocamentos cada vez mais curtos a partir do instante t_0, que é fixo. Em termos espaciais, dada a posição inicial do movimento, vamos "andar" com a posição final ao longo da trajetória até que ela fique bastante próxima da posição inicial. Veja:



No caso limite, em que a posição final do período analisado é infinitamente próxima da posição inicial e, portanto, o intervalo Δt é infinitamente pequeno, teremos o caso limite, em que a direção da velocidade vetorial instantânea é tangente a curva.



Repare que a velocidade vetorial instantânea refere-se a um determinado instante, e não a um intervalo de tempo. No caso acima, calculamos a velocidade vetorial instantânea para o instante t_0. Para cada instante diferente, a velocidade vetorial instantânea é tangente à trajetória na posição ocupada pelo móvel no instante considerado. Veja a seguir as velocidades vetoriais instantâneas em diferentes instantes:



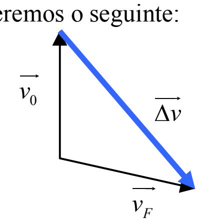
6. Os vetores variação de velocidade, aceleração média e aceleração instantânea

O **vetor variação de velocidade** em um intervalo $\Delta t = t - t_0$ é definido como

$$\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{v_F} - \overrightarrow{v_0} \,,$$

em que $\overrightarrow{v_0}$ é a velocidade inicial (no instante t_0) e $\overrightarrow{v_F}$, a velocidade ao final do período Δt, no instante t.

Se considerarmos o exemplo anterior, teremos o seguinte:

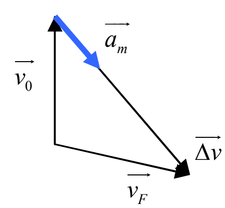


De forma idêntica à seção anterior, quando estudamos o vetor deslocamento, podemos calcular o módulo do vetor $\overrightarrow{\Delta v}$ através da Lei dos Co-senos, a partir do triângulo formado pelos vetores.

O **vetor aceleração média** (ou **aceleração vetorial média**) é a razão

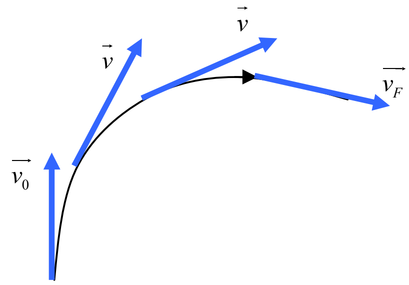
$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \,,$$

que, pelos mesmos motivos explicados anteriormente, tem a mesma direção e o mesmo sentido que $\overrightarrow{\Delta v}$, e seu módulo é dado por $\left|\overrightarrow{\Delta v}\right| / \Delta t$. Para o exemplo dado, temos

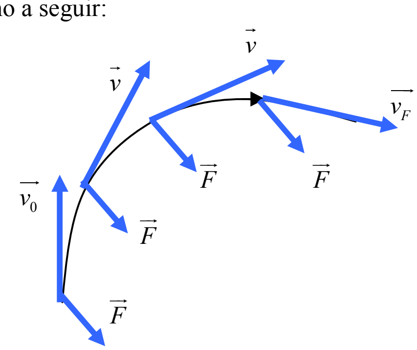


Chegamos a um ponto em que, caso não adiantemos alguns conceitos importantes desenvolvidos por Newton, os assuntos abordados ficam demasiadamente abstratos. Por exemplo, a aceleração vetorial média, a princípio, não tem nenhum significado tangível. Na verdade, podemos dizer que a aceleração é o resultado da aplicação de uma força. A força aplicada sobre um corpo é diretamente proporcional à aceleração adquirida por ele.

Vamos rever o exemplo anterior. O corpo tem, inicialmente, a velocidade $\overrightarrow{v_0}$, vertical apontada para cima. Algum agente externo interage com ele, fazendo com que mude a direção de sua velocidade e, portanto, a sua trajetória.



É plausível afirmar que a força deve ter a mesma direção e o mesmo sentido que a aceleração vetorial média. Ou seja, teremos algo como a seguir:



E é justamente essa interação através da força $\vec{F}$ que faz com que o móvel mude a direção de sua velocidade ao longo do tempo.

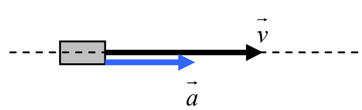
O **vetor aceleração instantânea** (ou **aceleração vetorial instantânea**) é a aceleração vetorial média para um período de tempo infinitamente pequeno.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{a_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

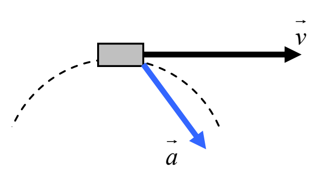
A aceleração vetorial instantânea corresponde à taxa de variação da velocidade vetorial instantânea. Isso significa que ela é responsável por fazer variar tanto a direção da velocidade, em uma trajetória curvilínea, como mostrado anteriormente, quanto o módulo da velocidade, fazendo com que o movimento seja acelerado ou retardado.

Vamos analisar essa dupla função da aceleração vetorial em diferentes exemplos.

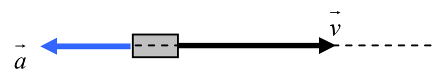
Exemplo 4.6.1: O movimento de um móvel é retilíneo (uma reta, não faz curvas) e acelerado (o módulo da velocidade está aumentando). É plausível supor que a aceleração tem a mesma direção e o mesmo sentido que a velocidade, já que vimos que a aceleração tem uma relação direta com a força aplicada sobre o móvel. Isto é, o móvel tem certa velocidade em um movimento retilíneo, e queremos manter sua direção, mas aumentar o seu módulo. É como se déssemos um empurrão, na mesma direção e no mesmo sentido que sua velocidade.



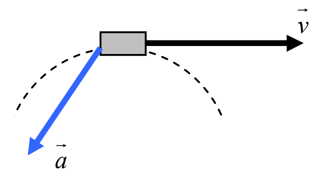
Exemplo 4.6.2: Ainda queremos ter um movimento acelerado, mas queremos que a trajetória tenha certa curvatura. Deveremos ter uma força e, portanto, uma aceleração, que exerça as duas funções.



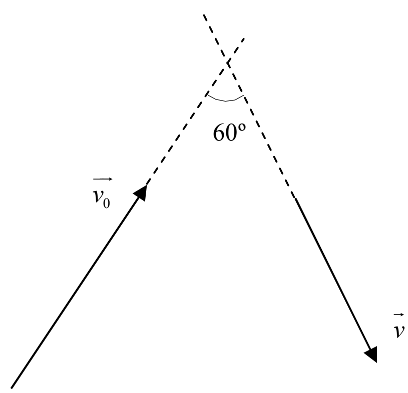
Exemplo 4.6.3: Para um movimento retilíneo e retardado, teremos



Exemplo 4.6.4: Para um movimento curvilíneo e retardado,

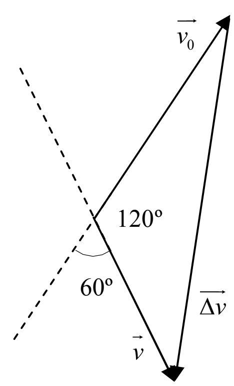


Exercício 4.6.1: Um móvel desloca-se sobre uma trajetória qualquer e suas velocidades $\overrightarrow{v_0}$ e $\vec{v}$ nos instantes t_0 e t são representadas pelos vetores abaixo.



Sabe-se que $\left|\overrightarrow{v_0}\right| = 8,0 \text{ m/s}$ e $\left|\vec{v}\right| = 6,0 \text{ m/s}$. Determine a aceleração vetorial média no intervalo $\Delta t = t - t_0 = 0,1 \text{ s}$.

Solução: Devemos reorganizar os vetores acima dispostos de forma que suas origens coincidam em um mesmo ponto. Assim, esboçamos também o vetor $\overrightarrow{\Delta v}$. Veja:



Pela Lei dos Co-senos, podemos calcular o módulo do vetor $\overrightarrow{\Delta v}$.

$$\left|\overrightarrow{\Delta v}\right|^2 = \left|\vec{v}\right|^2 + \left|\overrightarrow{v_0}\right|^2 - 2.\left|\vec{v}\right|.\left|\overrightarrow{v_0}\right|.\cos 120º$$

Como $\cos 120º = -\cos 60º$, temos

$$\left|\overrightarrow{\Delta v}\right|^2 = \left|\vec{v}\right|^2 + \left|\overrightarrow{v_0}\right|^2 - 2.\left|\vec{v}\right|.\left|\overrightarrow{v_0}\right|.(-\cos 60^\circ)$$

$$\left|\overrightarrow{\Delta v}\right|^2 = 6,0^2 + 8,0^2 - 2\times 6,0\times 8,0\times\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{\Delta v}\right|^2 = 100 + 48$$

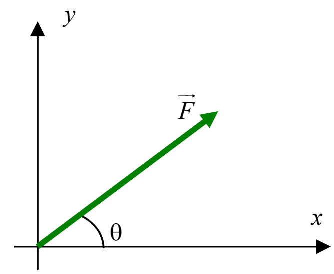
$$\left|\overrightarrow{\Delta v}\right| = 12,17 \text{ m/s}$$

A aceleração vetorial média, deve ter a mesma direção e sentido que $\overrightarrow{\Delta v}$, e seu módulo é dado por

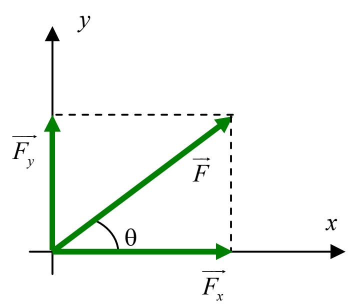
$$\left|\vec{a}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{\Delta v}\right|}{\Delta t} = \frac{12,17}{0,1} = 121,7 \text{ m/s}^2$$

7. Decomposição de um vetor em componentes ortogonais

Suponha um sistema referencial qualquer, com a origem sobre um corpo de dimensões desprezíveis. Sobre esse corpo, aplicamos uma força $\vec{F}$, que faz um ângulo θ com a direção horizontal, conforme a figura abaixo mostra.



Agora, vamos criar dois vetores que representam as "projeções" do vetor $\vec{F}$ sobre os eixos *x* e *y*: $\overrightarrow{F_x}$ e $\overrightarrow{F_y}$, respectivamente.



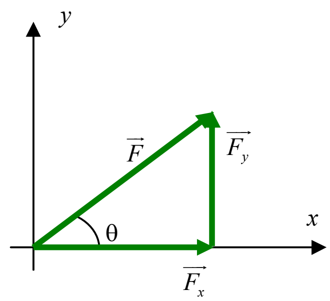
Já à primeira vista, podemos afirmar que $\vec{F}$ é a soma vetorial de $\overrightarrow{F_x}$ e $\overrightarrow{F_y}$.

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{F_y}}$$

Portanto, é equivalente aplicar sobre o corpo a força $\vec{F}$, ou simultaneamente $\overrightarrow{F_x}$ e $\overrightarrow{F_y}$. Essa nova visão sobre a aplicação da força $\vec{F}$ não é por acaso: a decomposição em duas componentes ortogonais sobre os eixos cartesianos determinados virá a facilitar muito os cálculos com vetores. Podemos calcular o módulo de $\vec{F}$ simplesmente utilizando as relações que já estudamos:

$$\left|\vec{F}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_x}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_y}\right|^2$$

Se arrumarmos os vetores acima de forma a enxergar a resultante vetorial como a união dos extremos do caminho formado pelos vetores, teremos um triângulo retângulo:



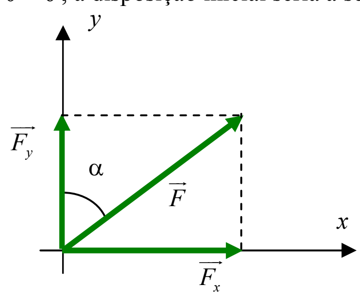
Desse triângulo retângulo, podemos extrair as seguintes relações trigonométricas em θ:

$$\cos\theta = \frac{\left|\vec{F}_x\right|}{\left|\vec{F}\right|} \Rightarrow \boxed{\left|\vec{F}_x\right| = \left|\vec{F}\right|.\cos\theta},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\left|\vec{F}_y\right|}{\left|\vec{F}\right|} \Rightarrow \boxed{\left|\vec{F}_y\right| = \left|\vec{F}\right|.\operatorname{sen}\theta},$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\left|\vec{F}_y\right|}{\left|\vec{F}_x\right|} \Rightarrow \boxed{\left|\vec{F}_y\right| = \left|\vec{F}_x\right|.\operatorname{tg}\theta} \text{ e } \boxed{\left|\vec{F}_x\right| = \frac{\left|\vec{F}_y\right|}{\operatorname{tg}\theta}}.$$

Analogamente, se tivermos $\alpha = 90^\circ - \theta$, a disposição inicial seria a seguinte:



E, nesse caso, teríamos:

$$\boxed{\left|\vec{F}_x\right| = \left|\vec{F}\right|.\operatorname{sen}\alpha},$$

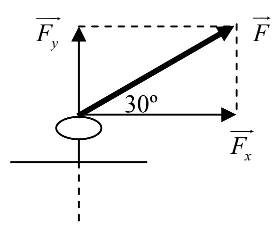
$$\boxed{\left|\vec{F}_y\right| = \left|\vec{F}\right|.\cos\alpha},$$

$$\boxed{\left|\vec{F}_x\right| = \left|\vec{F}_y\right|.\operatorname{tg}\alpha} \text{ e } \boxed{\left|\vec{F}_y\right| = \frac{\left|\vec{F}_x\right|}{\operatorname{tg}\alpha}}.$$

Repare que, dado o módulo de um vetor qualquer, podemos calcular suas projeções, simplesmente multiplicando-o pelo co-seno do ângulo entre o vetor e a projeção ou pelo seno do ângulo complementar.

Exercício 4.7.1: Um prego encontra-se cravado normalmente (perpendicularmente) a uma tábua. É preciso aplicar uma força de 20N ao longo do prego para arrancá-lo. Que força formando um ângulo de 30º com a tábua precisamos fazer para arrancar o prego?

Solução: Este exercício é uma aplicação prática da utilidade da decomposição de forças em componentes ortogonais. Contudo, existem muitas outras vantagens de seu uso. Vejamos como podemos esquematizar a situação descrita acima.



É fácil concluir que puxar o prego horizontalmente, isto é, na direção paralela à tábua, em nada vai adiantar para arrancá-lo. Assim, quando aplicamos a força $\vec{F}$, iremos decompô-la em duas componentes ortogonais: $\vec{F_x}$ na direção da tábua (a força inútil) e $\vec{F_y}$ perpendicular a ela, ou seja, na direção do prego (a força útil). Como a força $\vec{F}$ aplicada é a soma vetorial de suas componentes, aplicá-la unicamente é equivalente a aplicar isoladamente suas componentes. Vamos então substituir o problema por outro, no qual aplicamos apenas as duas componentes ortogonais no lugar da força real.

Agora, só a componente $\vec{F_y}$ será responsável por arrancar o prego da tábua, e pelo que já sabemos, ela deve ter intensidade de 20 N. A componente $\vec{F_x}$ não terá influência sobre o prego.

Podemos calcular o módulo da força $\vec{F}$, pois

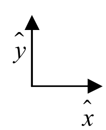
$$\begin{aligned} \left|\vec{F_y}\right| &= \left|\vec{F}\right|.\text{sen}\,30^{\circ} \\ 20 &= \left|\vec{F}\right|.\tfrac{1}{2} \\ \left|\vec{F}\right| &= 40\text{ N} \end{aligned} .$$

Ainda podemos observar que quanto mais inclinada em relação ao prego estiver a força aplicada, maior deve ser sua intensidade de forma que arranque o prego. Por isso, a posição “ótima” da força, isto é, que permite a menor intensidade para arrancar o prego, é a posição vertical. Isso ocorre, porque quanto mais inclinada em relação ao prego estiver a força, maior será a componente inútil da força, que deverá ser muito grande para que ainda se tenha 20 N na componente vertical, a componente útil.

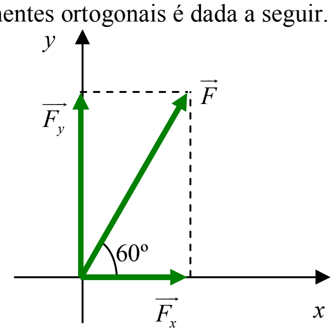
Certamente, a idéia de decomposição ainda não está muito clara, principalmente quanto ao motivo pelo qual esse método é usado. Nas próximas seções, a compreensão será desenvolvida.

8. Os versores ou vetores unitários

Antes de finalmente concluirmos a utilização dos vetores na física, ainda devemos apresentar um último conceito, os vetores unitários. Tratam-se de vetores ortogonais, na direção dos eixos estabelecidos para o sistema referencial do universo estudado, e de módulo igual a 1. Para evidenciar essa característica desses vetores, utilizaremos uma notação ligeiramente diferente: ao invés de uma seta, colocaremos um chapéu sobre o nome do vetor. Por exemplo, no plano, teríamos por padrão os seguintes vetores unitários (ou versores):



Os versores apresentam uma forma alternativa de representação de um vetor qualquer. Por exemplo, vamos considerar um vetor $\vec{F}$, com $\left|\vec{F}\right| = 12,0\text{ N}$, inclinado de 60º com a direção horizontal. A representação de $\vec{F}$ e de suas componentes ortogonais é dada a seguir.



Como vimos na seção anterior, podemos calcular os módulos das componentes ortogonais da seguinte forma:

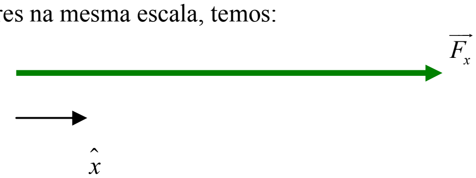
$$\left|\vec{F_x}\right| = \left|\vec{F}\right|.\cos 60^{\circ} = 12 \times \frac{1}{2} = 6,00\text{ N}$$

$$\left|\vec{F_y}\right| = \left|\vec{F}\right|.\text{sen}\,60º = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \approx 10,4 \text{ N}$$

A componente $\vec{F_x}$ tem a mesma direção e sentido que o vetor unitário $\hat{x}$. Além disso, como vetores unitários têm módulo igual a 1, o módulo de $\vec{F_x}$ é então seis vezes maior que o de $\hat{x}$, ou seja, $\left|\vec{F_x}\right| = 6.\left|\hat{x}\right|$. Resumiremos, a partir de agora, essas características dizendo que $\vec{F_x} = 6.\hat{x}$.

Preste bastante atenção na notação utilizada. Dizer que $\vec{F_x} = 6.\hat{x}$ significa que $\vec{F_x}$ é a multiplicação do versor $\hat{x}$ pelo valor escalar 6. E isso é mais abrangente do que simplesmente dizer que $\left|\vec{F_x}\right| = 6.\left|\hat{x}\right|$, isto é, que o módulo de $\vec{F_x}$ é seis vezes maior que o módulo de $\hat{x}$. A expressão inclui também a informação de que esses vetores tem a mesma direção e o mesmo sentido.

Colocando ambos os vetores na mesma escala, temos:



Quer dizer, multiplicar um vetor por um escalar positivo é:

- Manter a direção;
- Manter o sentido;
- Multiplicar o módulo do vetor pelo valor escalar.

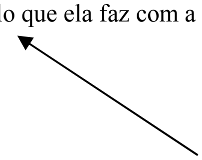
Analogamente ao que vimos na divisão por um escalar, multiplicar um vetor por um escalar negativo é:

- Manter a direção;
- Inverter o sentido;
- Multiplicar o módulo do vetor pelo módulo do valor escalar.

De forma análoga, dizemos que $\vec{F_y} = 10,4.\hat{y}$.

Como $\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y}$, dizemos que $\vec{F} = 6.\hat{x} + 10,4.\hat{y}$.

Exercício 4.8.1: Escreva em função dos vetores unitários $\hat{x}$ e $\hat{y}$ a força $\vec{F}$ dada abaixo. Sabe-se que seu módulo é igual a 5,0 N e que o ângulo que ela faz com a horizontal é de 30º.



Solução: Vamos calcular primeiramente as componentes ortogonais:

$$\left|\vec{F_x}\right| = \left|\vec{F}\right|.\cos 30º = 5\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 4,3 \text{ N}$$

$$\left|\vec{F_y}\right| = \left|\vec{F}\right|.\text{sen}\,30º = 5\frac{1}{2} = 2,5 \text{ N}$$

Mas repare que dessa vez, $\vec{F_x}$ tem sentido contrário ao de $\hat{x}$. Por isso, vamos dizer que $\vec{F_x} = -4,3.\hat{x}$. Sendo $\vec{F_y} = 2,5.\hat{y}$, podemos escrever $\vec{F}$ como:

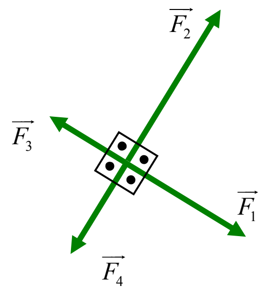
$$\vec{F} = -4,3.\hat{x} + 2,5.\hat{y}$$

Observação: Agora, de forma mais geral, podemos dizer que $\vec{F} = \pm\left|\vec{F_x}\right|\hat{x} \pm \left|\vec{F_y}\right|\hat{y}$.

9. Casos mais complexos do cálculo da força resultante

As técnicas que vimos nas últimas seções não existem à toa. Vamos ver agora, através de exercícios, alguns casos em que seu uso é bastante útil.

Exercício 4.9.1: Determine para o sistema abaixo o módulo da força resultante aplicada sobre um corpo puntiforme.



$$\left|\vec{F_1}\right| = 8\text{ N}$$
$$\left|\vec{F_2}\right| = 10\text{ N}$$
$$\left|\vec{F_3}\right| = 5\text{ N}$$
$$\left|\vec{F_4}\right| = 6\text{ N}$$

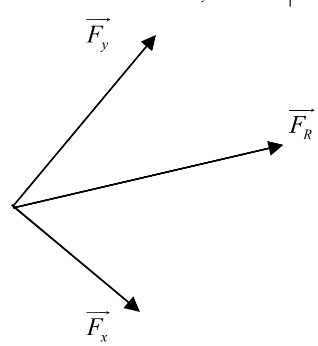
Solução: Vamos considerar os vetores unitários $\hat{x}$ e $\hat{y}$, mas não nas direções convencionais. Para facilitar a resolução, vamos chamar de $\hat{x}$ o vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido que $\vec{F_1}$ e de $\hat{y}$, o vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido que $\vec{F_2}$. Assim, podemos escrever todas as forças em função de $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Veja abaixo:

$$\vec{F_1} = 8.\hat{x}$$
$$\vec{F_2} = 10.\hat{y}$$
$$\vec{F_3} = -5.\hat{x}$$
$$\vec{F_4} = -6.\hat{y}$$

A força resultante é dada então por:

$$\vec{F_R} = \sum \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}$$
$$\vec{F_R} = 8.\hat{x} + 10.\hat{y} - 5.\hat{x} - 6.\hat{y}$$
$$\vec{F_R} = 3.\hat{x} + 4.\hat{y}$$

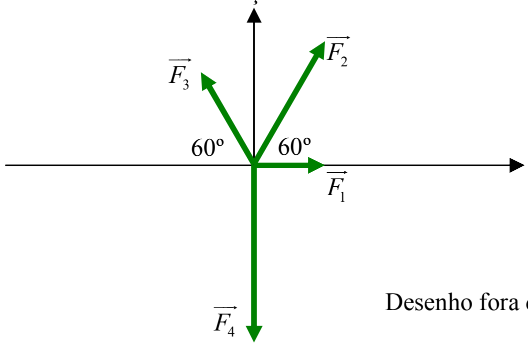
Se escrevermos a força resultante como a soma de suas componentes ortogonais, nas direções das forças dadas e dos versores definidos, teremos $\vec{F_R} = \vec{F_x} + \vec{F_y}$, onde $\left|\vec{F_x}\right| = 3\text{ N}$ e $\left|\vec{F_y}\right| = 4\text{ N}$.



Agora, podemos calcular o módulo da força resultante, pois

$$\left|\vec{F_R}\right|^2 = \left|\vec{F_x}\right|^2 + \left|\vec{F_y}\right|^2$$
$$\left|\vec{F_R}\right|^2 = 3^2 + 4^2 \quad .$$
$$\left|\vec{F_R}\right| = 5\text{ N}$$

Exercício 4.9.2: Determine a força resultante no sistema abaixo.



Desenho fora de escala

$\left|\vec{F_1}\right| = 2$ N

$\left|\vec{F_2}\right| = 10\sqrt{3}$ N

$\left|\vec{F_3}\right| = 6\sqrt{3}$ N

$\left|\vec{F_4}\right| = 24 - \sqrt{3}$ N

Solução: Vamos definir como vetores unitários $\hat{x}$ e $\hat{y}$, nas direções horizontal e vertical, respectivamente. Assim, podemos escrever em sua função as quatro forças aplicadas sobre o corpo.

$$\vec{F_1} = \left|\vec{F_1}\right|.\hat{x} \Rightarrow \vec{F_1} = 2.\hat{x}$$

$$\vec{F_2} = \left|\vec{F_2}\right|\cos 60º.\hat{x} + \left|\vec{F_2}\right|\operatorname{sen} 60º.\hat{y} \Rightarrow \vec{F_2} = 10\sqrt{3}.\frac{1}{2}.\hat{x} + 10\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\hat{y} = 5\sqrt{3}.\hat{x} + 15.\hat{y}$$

$$\vec{F_3} = -\left|\vec{F_3}\right|\cos 60º.\hat{x} + \left|\vec{F_3}\right|\operatorname{sen} 60º.\hat{y} \Rightarrow \vec{F_3} = -6\sqrt{3}.\frac{1}{2}.\hat{x} + 6\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\hat{y} = -3\sqrt{3}.\hat{x} + 9.\hat{y}$$

$$\vec{F_4} = -\left|\vec{F_4}\right|.\hat{y} \Rightarrow \vec{F_4} = -\left(24 - \sqrt{3}\right).\hat{y} = \left(\sqrt{3} - 24\right).\hat{y}$$

A força resultante então é dada por:

$$\vec{F_R} = \sum \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}$$

$$\vec{F_R} = \left(2 + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right).\hat{x} + \left(15 + 9 + \sqrt{3} - 24\right)\hat{y}$$

$$\vec{F_R} = \left(2 + 2\sqrt{3}\right).\hat{x} + \sqrt{3}.\hat{y}$$

Isso quer dizer que as componentes ortogonais $\vec{F_x}$ e $\vec{F_y}$ da força resultante têm módulos $\left|\vec{F_x}\right| = 2 + 2\sqrt{3}$ N e $\left|\vec{F_y}\right| = \sqrt{3}$ N. Podemos então calcular o seu módulo:

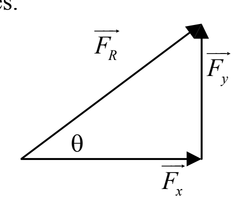
$$\left|\vec{F_R}\right|^2 = \left|\vec{F_x}\right|^2 + \left|\vec{F_y}\right|^2$$

$$\left|\vec{F_R}\right|^2 = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3}^2$$

$$\left|\vec{F_R}\right|^2 = 4 + 8\sqrt{3} + 4 \times 3 + 3 = 19 + 8\sqrt{3}$$

$$\left|\vec{F_R}\right| = \sqrt{19 + 8\sqrt{3}} \approx 5,73 \text{ N}$$

O problema é calcular a força resultante, e não apenas o seu módulo. Isto é, falta descobrirmos sua direção (e o seu sentido). Vamos então considerar o seguinte triângulo retângulo, cujos lados são a própria força resultante e suas componentes.



Desse triângulo, tiramos diretamente uma das três relações trigonométricas sobre θ, como a seguir:

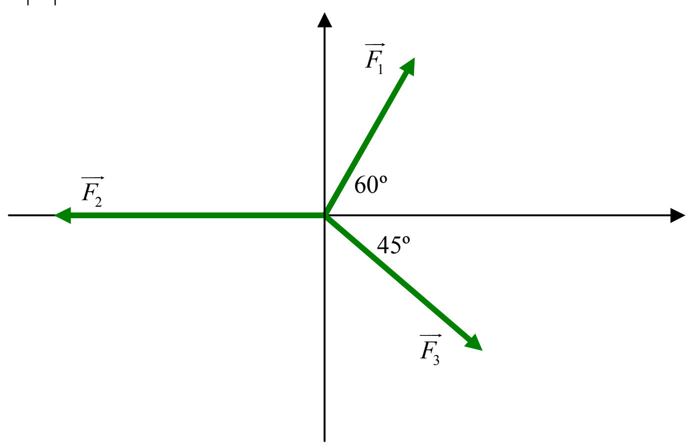
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\left|\vec{F_y}\right|}{\left|\vec{F_x}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}} \approx 0,32$$

$$\theta = \operatorname{arctg} 0,32$$

A expressão anterior de θ é suficiente para caracterizar a direção da força resultante. Porém, podemos ainda consultar a tabela trigonométrica dada, e descobrir o valor de θ. E, nesse caso, teremos:

$$\theta \approx 18^\circ$$

Exercício 4.9.3: Um sistema de forças aplicadas sobre um corpo puntiforme é mostrado abaixo. Se a não aplicação de nenhuma força sobre esse corpo é equivalente ao sistema dado, calcule os módulos de $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$. Sabe-se que $\left|\vec{F_1}\right| = \sqrt{6}$ N.



Solução: Dizer que não aplicar nenhuma força sobre o corpo é equivalente ao sistema dado, significa que sua força resultante é nula. Nesse caso, tanto sua componente em x quanto em y são nulas também. Como temos feito nos últimos casos, teremos:

$$\vec{F_R} = \left(\left|\vec{F_1}\right|.\cos 60^\circ + \left|\vec{F_3}\right|.\cos 45^\circ - \left|\vec{F_2}\right|\right).\hat{x} + \left(\left|\vec{F_1}\right|.\text{sen}\, 60^\circ - \left|\vec{F_3}\right|.\text{sen}\, 45^\circ\right).\hat{y}$$

Vamos anular cada uma das componentes agora. Teremos então um sistema a ser resolvido:

$$\begin{cases} \left|\vec{F_1}\right|.\cos 60^\circ + \left|\vec{F_3}\right|.\cos 45^\circ - \left|\vec{F_2}\right| = 0 \\ \left|\vec{F_1}\right|.\text{sen}\, 60^\circ - \left|\vec{F_3}\right|.\text{sen}\, 45^\circ = 0 \end{cases}$$

Substituindo as relações trigonométricas e $\left|\vec{F_1}\right| = \sqrt{6}$ N, teremos:

$$\begin{cases} \sqrt{6}.\dfrac{1}{2} + \left|\vec{F_3}\right|.\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left|\vec{F_2}\right| = 0 \\ \sqrt{6}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \left|\vec{F_3}\right|.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

A equação de baixo nos dá:

$$\sqrt{6}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \left|\vec{F_3}\right|.\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\left|\vec{F_3}\right|.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left|\vec{F_3}\right| = 3 \text{ N}$$

Substituindo esse valor na primeira equação, teremos:

$$\sqrt{6}.\frac{1}{2} + 3.\frac{\sqrt{2}}{2} - \left|\vec{F_2}\right| = 0$$

$$\left|\vec{F_2}\right| = \sqrt{6}.\frac{1}{2} + 3.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right) \approx 3{,}35 \text{ N}$$

10. Conclusão

Agora você já deve dominar de forma completa todas as grandezas mais básicas da física, tanto no âmbito escalar quanto no âmbito vetorial. Isso quer dizer que as definições e as relações decorrentes mais diretamente foram estudadas em ambos os planos de análise. Tudo que veremos a partir de agora são as diferentes relações entre as grandezas vistas, mais especificamente, veremos como alterar o movimento de um corpo, e sua interação com outros elementos de um sistema.

No próximo capítulo veremos as consagradas Leis de Newton, que constituem a peça-chave para o desenvolvimento de todo o estudo de mecânica. Podemos até dizer que é a partir das Leis de Newton que começaremos a estudar a física de verdade. Nesse sentido, até agora, na verdade, fizemos um estudo quase que matemático dos conceitos vistos.