CONJUNTOS

Nomenclatura: Conjuntos – Letras maiúsculas
Elementos – Letras minúsculas

Representação: A = {x,y,z}- Entre chaves

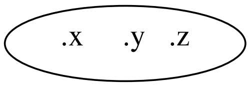


Diagrama de Euler-Venn

Descrição de um Conjunto

Enumerado - A= {a,e,i,o,u}
Descrito por uma propriedade - A= {x | x é vogal}

obs: Quando um elemento está em um conjunto diz-se que $a \in A$ (o elemento a pertence ao conjunto A).

Tipos de Conjuntos

Unitário- com um único elemento.
Ex: A= { a } , X= { 2 } , Y = { 5 }

Vazio – não possui elementos. **{ } ou** $\emptyset$
Ex: B = { x | $x \neq x$ } , C= { x | $x \in \mathbb{R}$ | $x^2+1=0$}

Universo – conjunto de todos os objetos da teoria dos conjuntos. **U =** { x | x = x} .

Iguais – quando independente da ordem ou de repetição possuírem exatamente os mesmos elementos.

Subconjuntos

Um conjunto A é subconjunto de B , se e somente se, **todo elemento A pertence a B**. Portanto $A \subset B$, lê-se A está contido em B (ou A é parte de B, ou ainda A é subconjunto de B).Pode-se dizer também que $B \supset A$, "B contém A".

Quando pelo menos 1 elemento de $a \notin B$ então a negação é respectivamente: $A \not\subset B$ e $B \not\supset A$.

Ex: Complete: a) {1,2} _____ {1,2,3}
b) {1,2} _____ {2,3,4}

É importante lembrar que relações de pertinência são entre elemento e conjunto, e contém/está contido são entre Conjuntos.

Propriedades

1) $\emptyset \subset$ A – vazio é subconjunto de qualquer conjunto
2) A $\subset$ A - todo conjunto é subconjunto de si próprio
3) A $\subset$ U - todo conjunto está contido no universo.
4) se A $\subset$ B e B $\subset$ C , então A $\subset$ C.

Conjunto das Partes

Dado um conj. A, o conjunto formado por todos os subconjuntos de A é o P(a) , conj. das partes de A

P(a) = { x | $x \in A$ }

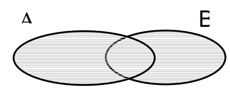
Ex: A = { 1 , 2 }, P(A) = { $\emptyset$, {1} , {2} , {1,2}}
"Se A possui n elementos,então P(A) possui 2^n elementos"

União de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a união ou reunião de A e B , é representada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos de A e todos de B.

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}}$$

Ex: A = {1,2} , B = {3,4} logo $A \cup B$ = {1,2,3,4}



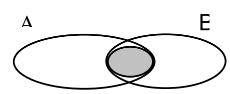
Propriedades

1) $A \cup A = A$	2) $A \cup \emptyset = A$
3) $A \cup B = B \cup A$	4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Interseção de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a interseção de A e B , representada por $A \cap B$, é o conjunto de elementos que pertencem simultaneamente a A e B.

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$$



Ex: A = {1,2} e B = {1,3,4,} , então $A \cap B$ = {1}

Propriedades

1) $A \cap A = A$	2) $A \cap U = A$
3) $A \cap B = B \cap A$	4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
*$A \cap B = \emptyset$, são chamados de conjunto disjuntos	

Diferença e Complementar

$$\boxed{A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

Caso Particular: Dados os conjuntos A e B, $B \subset A$, o conjunto A – B é denominado complementar de B em relação a A, representado por:

$C_A(B)$ ou $C_AB = A - B$

Intuitivamente dizemos que C_AB é o que falta a B para ser igual a A.

Se $B \not\subset A$, então não há sentido em se falar C_AB, existe A – B, mas não existe C_AB.

Quando A = U, costuma-se omitir o símbolo U na notação C_UB, sendo $CB = \overline{B}$

Número de Elementos nas operações com conjuntos

Dados A e B não-vazios ,chamaremos de:

$n(A)$ - número de elementos do conjunto A,

$n(B)$ – número de elementos do conjunto B,

$n(A \cap B)$ – nº de elementos do conj. $A \cap B$.

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

EXERCÍCIOS

1. Dados A = {1,2,3,4} e B = {2,4}, Reescreva as expressões utilizando os símbolos da teoria dos conjuntos e diga se é verdadeiro ou Falso.

a) 3 é elemento de A
b) 1 não está em B
c) B é parte de A
d) B é igual a A
e) 4 pertence a B

2. Faça o diagrama de Venn que simbolize a situação seguinte: A,B,C,D são conjuntos não vazios, $D \subset C \subset B \subset A$.

3.(**Cesgranrio**) Se X e Y são conjuntos e $X \cup Y = Y$,pode-se sempre concluir que:

a) $X \subset Y$ ou X=Y b) X=Y c) $X \cap Y=Y$
d) $X=\varnothing$ e) $Y \subset X$ ou Y=X

4. Sendo A = {x | x é a letra da palavra matemática} , o número de subconjuntos não vazios de A é:
a) 62 b) 31 c) 63 d) 64 e) 48

5.Assinale **V**erdadeiro ou **F**also:
( ) $0 \in \{0,1,2,3,4\}$ ( ) $\{a\} \in \{a,b\}$ ( ) $\varnothing \in \{0\}$
( ) $0 \in \varnothing$ ( ) $\{a\} \in \{a,\{a\}\}$ ( ) $\varnothing \in \{\varnothing,\{a\}\}$

6. (**Cesgranrio**) Qual o número de conjuntos x que satisfazem a expressão?

$$\{1,2\} \subset X \subset \{1,2,3\}$$

7. (**UGF**) Se A e B são conjuntos, então $(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}})$ é igual a:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $\overline{A} \cup \overline{B}$ d) $\overline{A} \cap \overline{B}$ e) $\varnothing$

8. Sabe-se que $A \cup B \cup C = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leqslant n \leqslant 10\}$, $A \cap B = \{2,3,8\}$, $A \cap C = \{2,7\}$, $B \cap C = \{2,5,6\}$,e $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leqslant n \leqslant 8\}$, Determine C:

9. Dados os conjuntos A , B e C com 2 , 3 e 4 elementos respectivamente. Qual é o número máximo de elementos de $((A \cap B)) \cap C$?

10. Dados os conjuntos A = {1,2,3,4,5,6} , B = {1,2,4,6,8} e C = {2,4,5,7} obtenha um conjunto X tal que : $A - X = B \cap C$

11. Sendo E = {1,2,3,4,5,6,7,8} , P(Y): $y + 1 \leqslant 6$ e $F = \{y \in E | y \text{ satisfaz } P(Y)\}$ Determine $\overline{F}$.

12. Dados A e B conjuntos tais que n(A) = 4 , n(B) = 5 e $n((A \cap B)) = 3$ determine o número de subconjuntos de $A \text{ Y } B$.

13. (**UERJ)** Em um posto de saúde foram atendidas, em determinado dia, 160 pessoas com a mesma doença, apresentando, pelo menos, os sintomas diarréia, febre, dor no corpo, isoladamente ou não. Apartir dos dados registrados nas fichas de atendimento dessas pessoas, foi elaborada a tabela abaixo:

Sintomas	***Frequência***
Diarréia	62
Febre	62
Dor no corpo	72
Diarréia e febre	14
Diarréia e dor no corpo	8
Febre e dor no corpo	20
Diarréia , febre e dor no corpo	X

Qual o valor de X:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12

14. Em um clube com quadra de futebol e vôlei , sabe-se que:
100 rapazes jogam vôlei e futebol
130 rapazes jogam vôlei, mas não jogam futebol
170 rapazes jogam futebol e não jogam vôlei.

Quantos rapazes jogam vôlei e quantos freqüentam o clube?

CONJUNTOS NUMÉRICOS

¥ $= \{0,1,2,3,...\}$ – conjunto dos números naturais

¢ $= \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ - conjunto dos números inteiros

¤ $= \{\, x \mid x = \dfrac{a}{b}, a \wedge b \in$ ¢ $, b \neq 0\}$ - conj. dos nº racionais

Racionais (¤)

Todos os números que podem ser escritos na forma de fração são racionais, portanto são eles: inteiros , decimais exatos e dízimas periódicas.

Dízimas Periódicas

São números decimais que tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente. Os algarismos que se repetem são denominados **período** e os algarismos depois da vírgula **ante-período.**

Ex: 1 / 3 = 0,3333.... (período 3)
2 / 7 = 0,285714285714... (período 285714)

Todo número decimal pode ser escrito na forma de fração, sendo ele um decimal exato, o numerador é o decimal sem a vírgula e o denominador o algarismo 1 seguido de tantos zeros quanto forem os números de casas decimais.

Ex: 0,37 = 37 / 100 2,631 = 2631 / 1000

Dízima Periódica Simples - possui apenas período.
Ex: 0,656565.... 0,111111....

"Para determinar a fração geradora da dízima (geratriz) :O numerador é o período e o denominador por tantos "noves" quantos forem os algarismos do período."
Ex: 0,656565... = 65 / 99

Ou ainda podemos fazer a seguinte regrinha:

$$\begin{cases} x = 0,656565 \\ 100x = 65,656565 \end{cases} \Rightarrow 99x = 65 \Rightarrow x = \frac{65}{99}$$

O segundo termo depende do período, ou seja se o período tivesse apenas um algarismo teríamos 10x se fossem 3 ,1000x e assim sucessivamente.

Dízima Periódica Composta – possui ante-período e período.
Ex: 0,14444.... 0,521111...

Veremos dois macetes de como achar a geratriz:

$$0,14444... = \frac{14-1}{90} = \frac{13}{90}$$

neste caso subtrai-se os algarismos do ante-período junto ao período pelo ante-período e divide-se por tantos 9 quanto forem os algarismos do período seguido de tantos zeros quanto forem os algarismos do ante-período.

Analogamente a regrinha da dízima simples temos:

$$\begin{cases} x = 0,14444... \\ 10x = 1,4444... \\ 100x = 14,4444... \end{cases} \Rightarrow 90x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{90}$$

No segundo termo (10x) terá tantos zeros quantos forem os algarismo do ante-período e o terceiro termo teremos o segundo acrescido de tantos zeros quantos forem os algarismos do período.

Números Irracionais (I)

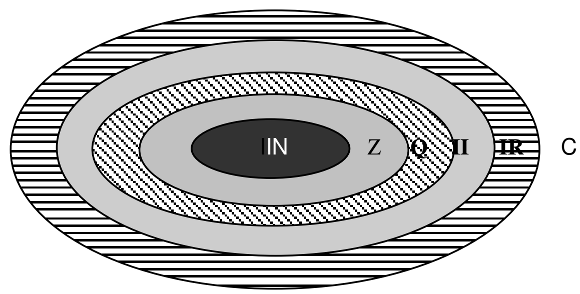
Existem para que todos os pontos da reta sejam representados, pois os racionais não conseguem representar todos. São todos os números decimais não exatos e não periódicos, assim como toda raiz não exata.

Ex: n = 0,151617....
$\sqrt{2} = 1,4142135...$
π = 3,1415926...
e = 2,7182818...

Outros Conjuntos

$\mathbb{R} -$ *conj. dos números reais ,* $\mathbb{Q} \cup I$
$\mathbb{C} -$ *conjunto dos números complexos*
$\mathbb{R}^2 -$ *conjunto dos pontos no plano*
$\mathbb{R}^3 -$ *conjunto dos pontos no espaço*

Representação Geométrica



Intervalos

Dados dois números a e b, com a < b definimos alguns subconjuntos de IR como intervalos de extremos a e b:

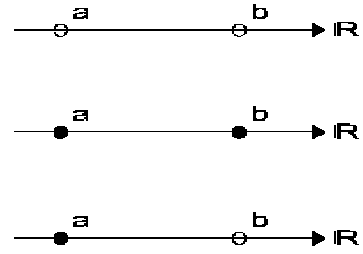
Aberto:]a,b[= $\{x \in IR \mid a < x < b\}$

Fechado: [a,b] = $\{x \in IR \mid a \le x \le b\}$

Semi-fechado ou Semi-aberto:

[a,b[= $\{x \in IR \mid a \le x < b\}$

São representados respectivamente por:



EXERCÍCIOS

15. Coloque na forma de uma fração irredutível os seguintes números racionais: 0,4 ; 0,4444... ; 0,32 ; 0,323232... ; 54,2 ; 5,423423423...

16. **(PUC)** O valor de $\sqrt{0{,}444...}$ é:
a) 0,222.. b) 0,3333... c) 0,4444...
d) 0,5555 c) 0,666...

17. (**PUC**) Somando as dízimas periódicas 0,4545... e 0,5454... obtém-se
a) um inteiro
b) um racional maior que 1
c) um racional menor que 1
d) um irracional maior que 1
e) um irracional menor que 1

18. **(UFF)** Se X e Y são racionais onde X = 0,101010... e Y = 0,0101010... , então o quociente X/Y é:
a) 0,0101010... b) 0,11 c) 10
d) 10,101010... e) 11

19. (**UFF-RJ)**Considere p,q ™ N tais que p e q são números pares. Se p>q , pode-se afirmar:
a) (pq+1) é múltiplo de 4 b) p – q é impar
c) p + q é primo d) $p^2 - q^2$ é par
e) p (q+1) é impar

20. **(UNIRIO)** O valor de $\sqrt{15-\sqrt{32+\sqrt{25-\sqrt{81}}}}$ é:
a) 1 b)2 c) 3 d) 4 e) 5

21. **(PUC)** O valor de $\sqrt{1{,}777...}/\sqrt{0{,}111...}$ é:
a) 1 b) 4 c) 4,777... d) 3 e) 4/3

22. **(PUC)**Se $-2 \le x \le 6$ e $3 \le y \le 9$,então x-y está entre:
a) -2 e 9 b) -5 e 3 c) -5 e -3 d) -3 e 11 e) -11 e 3

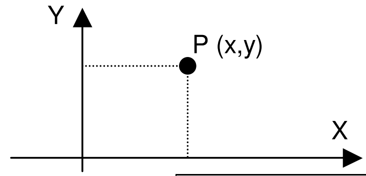
23. Se 0 < x < 1, qual dos números abaixo é maior que x?
a) x^2 b) x^3 c) $\sqrt{x}$ d) -x e) 0,9x

24. **(UFF)** Com relação aos conjuntos: $P=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\leqslant\sqrt{7}\}$ e $Q=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2\leqslant 0{,}333...\}$
I) $P\cup Q=P$ II) Q-P = {0}
III) $P\subset Q$ IV) $P\cap Q=Q$
Somente são verdadeiras as afirmativas:
a) I e III b) I e IV c) II e III d) II e IV e) III e IV

25. (**Fuvest**) Seja $r=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
a) Escreva $\sqrt{6}$ em função de r

Par Ordenado (x,y)

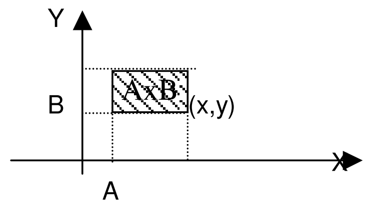
Conjunto formado de dois elementos onde a ordem importa representado entre parenteses.
Podem ser representados em um sitema cartesiano ortogonal onde:
x – eixo das abcissas e y- eixo das ordenadas
Este sistema é utilizado para localizar um ponto no plano (coordenadas de um ponto P)



$\boxed{(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c\wedge b=d}$

Produto Cartesiano

AXB : A cartesiano B , formado pelos pares ordenados, onde o primeiro elemento pertencente a A e o segundo elemento pertence a B.



Sendo A = { 1,2,3} e B = {1,2} , temos:
AXB = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)}
BXA = {(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)}

$\boxed{n(AXB) = n(BXA) = n(A)\ .\ n(B)}$

obs: AX Ø = Ø

Relações

Chama-se de relação R de A em B, o conjunto R formado pelos pares (x,y) , formado mediante uma lei de formação.
Ex: A = {-2,-1,0,1} B = {-1,0,1,2,3,4}
R_1 = {(x,y) Є AXB | y = x+1}
R_1 = {(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,2)}

R_2 = {(x,y) Є AXB | x+y = 5}
R_2 = {(1,4)}

Dominio e Imagem

Em uma relação de A em B. Chama-se **domínio** de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R

$\boxed{x\in D\Leftrightarrow \exists y, y\in B | (x,y)\in R}$

Chama-se **imagem** de R o conjunto Im de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

$\boxed{y\in \Im \Leftrightarrow \exists x, x\in A | (x,y)\in R}$

Ex: A = {-2,3,5} , B = {-1,1,4,6,8}
R = {(x,y) Є AXB | é divisor de y}
R = {(-2,4),(-2,6),(-2,8),(3,6)}
D(R) = {-2,3} Im={4,6,8}
diagrama de flechas

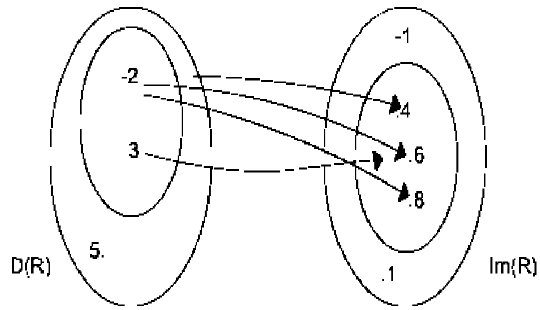
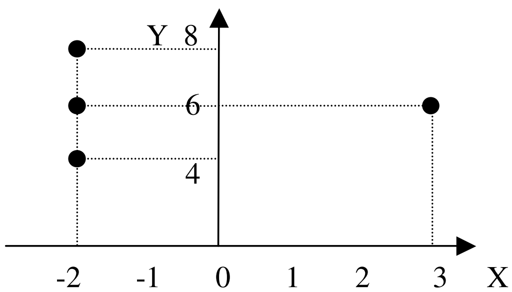


diagrama cartesiano



obs: Em um gráfico cartesiano de uma relação R, projetando-o,ortogonalmente, sobre os eixos X e Y temos respectivamente D(R) e Im(R).

EXERCÍCIOS

26. (**PUC**) A = {3,4,6} , B = {1,2} , C = { 3,6,9,12} .
Determine (C-A) X B

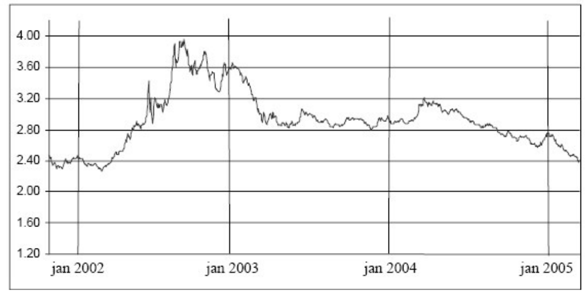
27. Sabendo que $\{(1,2),(4,2)\}\subset A^2$ e $n(A^2) = 9$ represente o conjunto A^2.

28.(**PUC**) A = $\{x\in\mathbb{R}|1\leq x\leq 3\}$
B = $\{x\in\mathbb{R}|-1\leq x\leq 1\}$
Represente graficamente: AXB e BXA

Gráficos (Enem 2005)

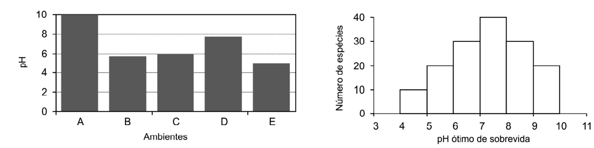
Faremos o estudo de interpretação de gráficos através de exemplos.

29. No gráfico abaixo, mostra-se como variou o valor do dólar, em relação ao real, entre o final de 2001 e início de 2005.



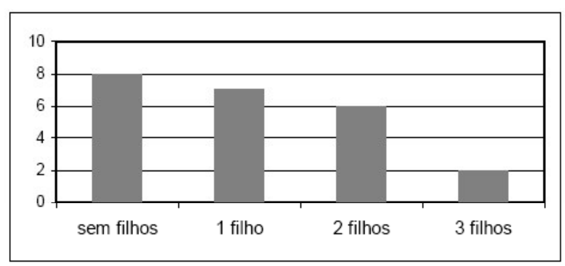
Durante esse período, a época em que o real esteve mais desvalorizado em relação ao dólar foi no
(A) final de 2001.
(B) final de 2002.
(C) início de 2003.
(D) final de 2004.
(E) início de 2005.

30. Um estudo caracterizou 5 ambientes aquáticos, nomeados de A a E, em uma região, medindo parâmetros físicoquímicos de cada um deles, incluindo o pH nos ambientes. O Gráfico I representa os valores de pH dos 5 ambientes.
Utilizando o gráfico II, que representa a distribuição estatística de espécies em diferentes faixas de pH, pode-se esperar um maior número de espécies no ambiente:



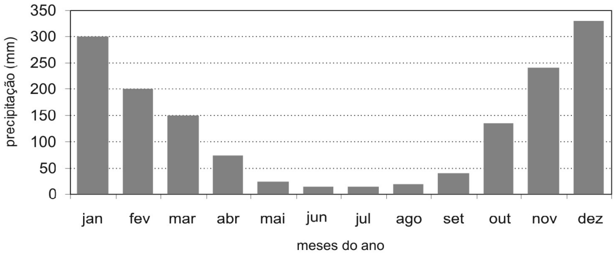
(A) A. (B) B. (C) C. (D) D. (E) E.

31. Analisando o gráfico abaixo,de filhos por mulheres,responda:



a) Quantas mulheres não tiveram filhos?
b) Quantas tiveram pelo menos 1 filho?

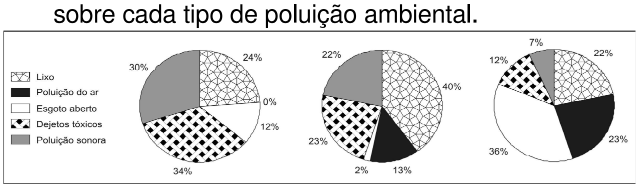
32. Em uma área observa-se o seguinte regime pluviométrico:
Os anfíbios são seres que podem ocupar tanto ambientes aquáticos quanto terrestres. Entretanto, há espécies de anfíbios que passam todo o tempo na terra ou então na água. Apesar disso, a maioria das espécies terrestres depende de água para se reproduzir e o faz quando essa existe em abundância.



Os meses do ano em que, nessa área,esses anfíbios terrestres poderiam se reproduzir mais eficientemente são de:

(A) setembro a dezembro.
(B) novembro a fevereiro.
(C) janeiro a abril.
(D) março a julho.
(E) maio a agosto.

33.Moradores de três cidades, aqui chamadas de X, Y e Z, foram indagados quanto aos tipos de poluição que mais afligiam as suas áreas urbanas. Nos gráficos abaixo estão representadas as porcentagens de reclamações sobre cada tipo de poluição ambiental.

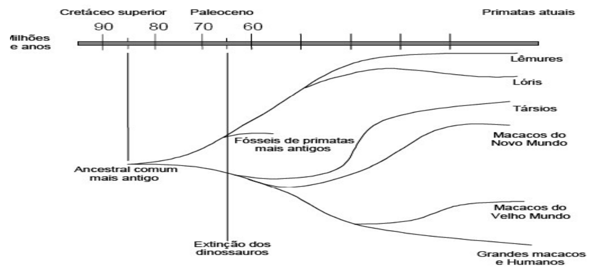


Considerando a queixa principal dos cidadãos de cada cidade, a primeira medida de combate à poluição em cada uma delas seria, respectivamente:

(A) Manejamento de lixo, Esgotamento sanitário e Controle emissão de gases
(B) Controle de despejo industrial, Manejamento de lixo e Controle emissão de gases
(C) Manejamento de lixo, Esgotamento sanitário e Controle de despejo industrial
(D) Controle emissão de gases Controle de despejo industrial Esgotamento sanitário
(E) Controle de despejo industrial, Manejamento de lixo e Esgotamento sanitário

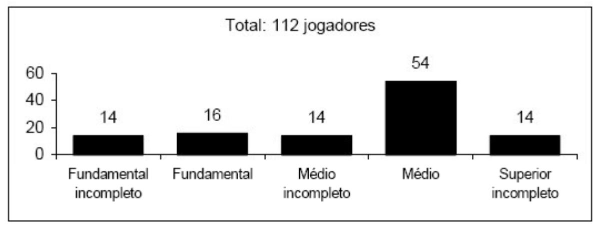
34. Foi proposto um novo modelo de evolução dos primatas.Examinando esta árvore evolutiva podemos dizer que a divergência entre os macacos do Velho Mundo e o grupo dos grandes macacos e de humanos ocorreu há aproximadamente:

(A) 10 milhões de anos.
(B) 40 milhões de anos.
(C) 55 milhões de anos.
(D) 65 milhões de anos.
(E) 85 milhões de anos.



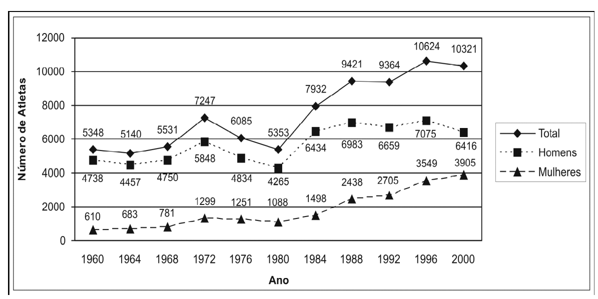
(Fonte: Raquel Aguiar, *Ciência Hoje on-line* 13/05/02.)

35. A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa abaixo,realizada com os jogadores profissionais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro.
De acordo com esses dados, o percentual dos jogadores dos quatro clubes que concluíram o Ensino Médio é de aproximadamente:



(A) 14%. (B) 48%. (C) 54%. (D) 60%. (E) 68%.

36. O número de atletas nas Olimpíadas vem aumentando nos últimos anos, como mostra o gráfico. Mais de 10.000 atletas participaram dos Jogos Olímpicos de Sydney, em 2000.Nas últimas cinco Olimpíadas, esse aumento ocorreu devido ao crescimento da participação de :



(A) homens e mulheres, na mesma proporção.
(B) homens, pois a de mulheres vem diminuindo a cada Olimpíada.
(C) homens, pois a de mulheres praticamente não se alterou.
(D) mulheres, pois a de homens vem diminuindo a cada Olimpíada.
(E) mulheres, pois a de homens praticamente não se alterou